PREPARATION
A
LA TERMINALE S

<u>Mathématiques</u>

Lycée Marcel Dassault
Eté 2010

Anne Blein
Dominique Caurant

MODE D'EMPLOI

A lire attentivement avant de commencer

Ce qui vous est proposé ici est une préparation à la terminale S.

Elle doit vous permettre :

- De retrouver les résultats essentiels rencontrés en 1S,
- De les mémoriser,
- De réviser les notions et le vocabulaire précis,
- De revoir les méthodes de base,
- De vous entraîner en retrouvant les bons réflexes,
- De combler d'éventuels lacunes ou oublis,
- De vous remotiver,
- De vous donner une certaine aisance pour bien démarrer.

Commencer cette préparation à partir du 10 août à raison d'une à deux heures par jour. Puis lire et relire sans modération

Ne pas hésiter à compléter en élaborant des fiches personnelles (synthèse ou méthode) et en vous entraînant au calcul algébrique (voir éventuellement certains sites en ligne).

Cette préparation s'articule autour de grands chapitres regroupés par thèmes :

- Calcul algébrique
- Etudes de fonctions
- Suites
- Géométrie
- Trigonométrie
- Statistiques et probabilités

Pour chaque chapitre, les résultats essentiels seront à compléter, en vous aidant de votre cours de première si nécessaire, puis des exercices d'application type seront proposés. Il n'est pas exclu que certaines de ces fiches soient utilisées sous forme de rappel si besoin est en terminale.

Quelques intermèdes pour ceux qui suivront la spécialité de maths se glissent entre les thèmes… mais vous pouvez tous les chercher !

Thème n°1 : CALCUL ALGEBRIQUE

Les compétences :
Développer, factoriser, réduire au même dénominateur, transformer une expression algébrique.
Résoudre des équations et inéquations. Etudier le signe d'une expression algébrique.

LES OUTILS

Identités remarquables

$(a+b)^2 =$

$(a-b)^2 =$.

$(a+b)(a-b) =$

$(a+b)^3 = a^2+3a^2 b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^2-3a^2 b+3ab^2-b^3$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Trinôme du second degré

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions de $a x^2 + b x + c = 0$			
Factorisation de $a x^2 + b x + c$			
Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$	x f(x)	x f(x)	x f(x)

Polynômes :

- On appelle fonction polynôme ou plus simplement **polynôme** toute fonction , définie sur ℝ qui peut s'écrire sous la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont des réels $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients du polynôme
- Chacun des termes $a_p x^p$ est appelé …………..
- On appelle **degré** d'un polynôme, le plus … …….des degrés des monômes dont il est la somme.
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils sont de même degré et que tous leurs coefficients sont égaux.
- Un réel a est une **racine** (ou zéro) du polynôme P si et seulement si …………….
- Un réel a est une racine du polynôme P si et seulement on peut **factoriser** P par (x–a) ; c'est à dire s'il existe un polynôme Q tel que : P(x) = (x–a) Q(x).

EXERCICES

1- Factoriser

$A = 2x - x(5 - x)$ $B = (x+3)(2x - 5) + 2x + 6$ $C = x^3 - 1 - (7 - x)(x + 1)$

2- **Développer, puis simplifier :**

$G = (2 + \sqrt{5})^2$ $H = (3 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{5})$ $I = (5\sqrt{2} - 1)^2$ $J = (5 - 3\sqrt{3})(1 + 3\sqrt{3})$

3- Rendre rationnels les dénominateurs

$A = \dfrac{3\sqrt{5}}{7\sqrt{2}}$; $B = \dfrac{5}{2 - \sqrt{7}}$; $C = \dfrac{3 - 5\sqrt{2}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}$

4- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(3x + 1)(7 - x) + (7 - x)^2 = 0$; $x^2 - 9 = (2x + 1)(x + 3)$; $x^3 = 4x$; $x^2 - 81 + (x - 9)(x + 5) = 0$

$\dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{7}{3 - x}$; $\dfrac{9 - x^2}{(3x + 1)(2 - x)} = 0$; $\dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x^2 - 4x + 2} = 2$

5- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(3x + 1)(7 - x) + (7 - x)^2 < 0$; $\dfrac{9 - x^2}{(3x + 1)(2 - x)} \geq 0$; $\dfrac{2x}{x + 1} < \dfrac{7}{3 - x}$

6-Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt{5x^2 - 4}$; $g(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2x - 3}{x^2 - 6x + 5}$; $h(x) = \dfrac{5x + 7}{\sqrt{3x + 2}}$; $k(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$

7- Transformation d'écritures :

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -6x^3 + 5x^2 + 29x - 10$

Montrer que -2 est racine de f
En déduire une factorisation de f puis résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$

- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$-{-1 ;1} par $g(x) = \dfrac{2x^3 + 5}{x^2 - 1}$.

Montrer que g(x) peut s'écrire sous la forme :$g(x) = ax + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x-1}$, où a, b et c sont des réels que vous déterminerez.

1er intermède : NOMBRES CROISES

en introduction de la divisibilité, en SPE Math.

Remplir la grille de nombres croisés ci-dessous sachant que tous les nombres y figurant sont des entiers naturels non nuls.

	A	B	C	D	E
1					
2					■
3				■	
4					
5		■			

1. Carré parfait dont le produit des chiffres est 756.
2. Le nombre formé de ses deux premiers chiffres est le même que celui formé de ses deux derniers chiffres.
3. Multiple de 139.
   Reste dans la division euclidienne de 2001 par 9.
4. Permutation de 23 444.
5. Carré parfait.
   Le produit de ses chiffres est 392.

A. La somme de ses chiffres est 35.
B. Entier divisible par 11.
C. Nombre palindrome (qui se lit aussi bien à l'endroit qu'à l'envers).
D. Nombre premier.
Cube parfait.
E. Entier naturel admettant un seul diviseur positif.
Le produit de ses chiffres est 72 et seul son dernier chiffre est pair.

<u>Remarque</u> : un nombre est appelé carré parfait s'il est le carré d'un entier (ex : $16 = 4^2$) et cube parfait s'il est le cube d'un entier (ex : $8 = 2^3$).

Thème n°2 : ETUDES DE FONCTIONS

Les compétences :
Déterminer un domaine de définition, étudier la parité, calculer une dérivée et en déduire les variations de la fonction. Etablir l'équation d'une tangente, déterminer les éléments de symétrie d'une courbe, étudier les limites d'une fonction et en déduire l'existence d'asymptotes à la courbe. Etudier la position relative de courbes représentatives (deux courbes, courbe et tangente, courbe et asymptote,…)

LES OUTILS

Domaine de définition

noté D_f, de la fonction f , c'est...

....

Calcul différentiel

Fonction dérivable en un point

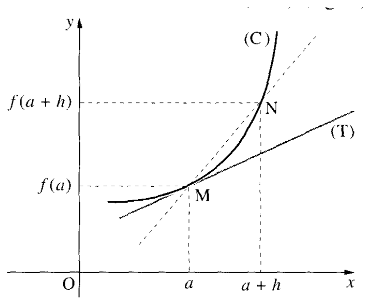
Soit f une fonction définie sur I, a un élément de I. On dit que f est dérivable en a :

- si $\lim\limits_{x \to a}$ ……….. = L avec L réel.
- ou si $\lim\limits_{h \to 0}$ …………….. = L avec L réel.

Ces définitions sont équivalentes. Le nombre L est appelé nombre dérivé de f en a et noté : f'(a).

f'(a) = $\lim\limits_{x \to a}$ ……….. = $\lim\limits_{h \to 0}$ ………………

Interprétation graphique :



C est la courbe représentative de f dans un repère.
Une équation de la tangente T à C au point A d'abscisse a est
……………………………………………………

Dérivées des fonctions usuelles

f(x) =	f '(x) =	f dérivable sur l'intervalle
k (constante)		
x		
x^2		
x^n , $n \in \mathbb{N}^*$		
$\frac{1}{x}$		
$\sqrt{x}$		
sin x		
cos x		

Dérivées et opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I , k un nombre réel.
Soit f une fonction dérivable sur I.

Formules			Conditions de validité
$(u + v)' = ...$	$(ku)' =......$	$(u \times v)' = ...$	$\varnothing$
$\left(\frac{1}{v}\right)' = ...$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = ...$		v ne s'annule pas sur I.
Si $g(x) = f(ax + b)$, alors $g'(x) =$			$(ax + b) \in I$.

CP :Si $g(x) = \cos(ax+b)$ alors $g'(x) = ……………..$; si $g(x) = \sin(ax+b)$ alors $g'(x)= ……………$

Dérivée et sens de variation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
(1) f est constante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est sur I.
(2) f est strictement croissante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est sur I (éventuellement nulle en des points isolés).
(3) f est strictement décroissante sur I, si et seulement si, la dérivée f' est sur I (éventuellement nulle en des points isolés).

Dérivée et extremum local :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert et c un élément de I.
- Si f(c) est un extremum local, alors
- Si f' , alors f(c) est un extremum local.

Remarque : la tangente à C_f au point d'abscisse c est alors horizontale.

Courbes et symétrie

Une fonction $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est **paire** si et seulement si pour tout x élément de I on a :
- $-x \in I$ (I est centré en 0)
- $f(-x) = ...$

La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est ………………………………………..

Une fonction $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est **impaire** si et seulement si pour tout x élément de I on a :
- $-x \in I$ (I est centré en 0)
- $f(-x) = ...$

La courbe représentative d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est ………………………………………

Soit f une fonction définie sur I et C sa représentation graphique dans un repère orthogonal.
La droite d'équation x = a est un **axe de symétrie** pour C lorsque pour tout x tel que $a + x \in I$ on a :
- $a - x \in I$ (I est centré en a)
- $f(a + x) = ...$

Le point A(a ;b) est un **centre de symétrie** pour C lorsque pour tout x tel que $a + x \in I$ on a :
- $a - x \in I$
- ....

Limites

Cas indéterminés :

Les quatre cas où la limite présente une forme indéterminée et qui nécessitent une étude approfondie sont :

……………………………………………..

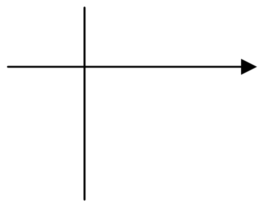
Cas particuliers :

- la limite en + ∞ ou en – ∞ d'un polynôme est égale à celle de son ……….
- la limite en + ∞ et en – ∞ d'une fonction rationnelle est égale à la limite ………………………………………………..

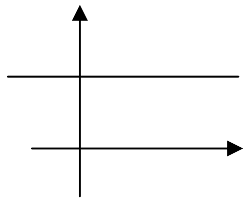
Asymptotes

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

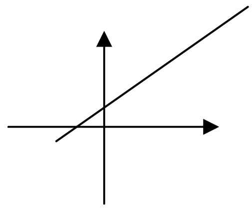
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, alors la droite d'équation x = a est une **asymptote** **…………..** pour la courbe représentative de f.



- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation y = b est une **asymptote** **…………….** pour la courbe représentative de f.



- Si $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, alors la droite d'équation y= ax+b est une **asymptote …………….** pour la courbe représentative de f.



- Dans les cas 2 et 3, on peut étudier **la position de la courbe par rapport à l'asymptote** .

Méthode : on pose de d(x) =f(x) – b (ou d(x)= f(x) – (ax+b)).

- Lorsque d(x) >0, la courbe se trouve ……………………… de l'asymptote.
- Lorsque d(x) <0, la courbe se trouve ……………………… de l'asymptote.

Remarque : On applique la même méthode pour étudier les positions relatives de deux courbes, d'une courbe et d'une tangente.

EXERCICES

1- **Compléter :**

- Si $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \infty$, alors…………………
- Si $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = 5$, alors……………………. .et………………

Si, en outre f(1) = –3, alors l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est…………………

- Chercher les points de la courbe où la tangente est parallèle à la droite d'équation y = – 3x +7 revient à résoudre l'équation ………………………….

2- **Déterminer le domaine de définition** de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{9- x^2}}$

3- **Soit f la fonction définie par $f(x) = (x - 1)\sqrt{x - 1}$.**

a) Donner le domaine de définition de f.
b) Sur quel domaine les théorèmes usuels nous permettent-ils de conclure à la dérivabilité de f ?
c) Etudier la dérivabilité de f en 1.
d) Déterminer le domaine de dérivabilité de f
e) Calculer f'(x)

4- Déterminer les dérivées des fonctions suivantes après avoir précisé leur domaine de définition et de dérivabilité

$f(x) = \sqrt{- 3x + 4}$; $g(x) = \dfrac{\cos(3x+1)}{x+5}$; $h(x) = 5\, x^6 - \dfrac{7}{3x^5} + 8 \sin x + 10\, x^{-8}$

$m(x) = 3 \sin(4x + \dfrac{\pi}{3})$ $p(x) = \dfrac{\cos 2x}{5 + \sin^2 3x}$

5- Etude d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 4}{2x + 4}$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de D_f $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x + 4}$
3. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
4. Déterminer les équations des éventuelles asymptotes verticales à la courbe représentative de f.
5. On note Δ la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 2$ .Démontrer que la droite Δ est asymptote oblique à la courbe en $- \infty$ et en $+ \infty$.
6. Etudier la position de la courbe par rapport à Δ .
7. Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe, puis donner le tableau de variations complet de la fonction f.
8. Déterminer les coordonnées exactes des points A et B d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
9. Existe-t-il des points de la courbe admettant une tangente horizontale? Si oui, déterminer leurs coordonnées et l'équation des tangentes.
10. Existe-t-il des points de la courbe admettant une tangente parallèle à la droite D d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x + 1$? Si oui, déterminer leurs coordonnées.
11. Tracer les asymptotes (en pointillés), la courbe et ses tangentes. *(unité graphique 1 cm)*

6- **Etude d'une fonction**

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1\ ;+\infty[$. On donne ci-contre son tableau de variation.

De plus, on admet que, pour tout x élément de $]1\ ;+\infty[$ f (x) peut s'écrire sous la forme : $f(x) = ax + \dfrac{b}{x- c}$,où a, b, c, sont trois nombres réels (avec a et b non nuls) que l'on se propose de déterminer à partir des indications fournies par le tableau de variation de f.

On appelle C la représentation graphique de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	2,5	↗	$+\infty$

1). a) Utiliser le tableau de variation pour justifier l'existence d'une droite D asymptote à *C*. Donner une équation de D.

b) En déduire la valeur de c.

Pour les questions suivantes, on prendra : $f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$.

2). Le tableau de variation nous fournit les coordonnées d'un point particulier de *C*. En déduire une relation entre a et b.

3). Calculer la dérivée f ' de la fonction f . Utiliser le tableau de variation pour trouve une deuxième relation entre a et b.

4). Déterminer les réels a et b.

Partie B

On admet que la fonction f est définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$.

1). a) Montrer que la droite D' d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à *C*.

b) Etudier la position relative de *C* et de D'.

2). a) Résoudre par le calcul sur]1 ; + ∞[l'équation f(x) = 3.

b) Résoudre l'inéquation f(x) > 3 sur]1 ; + ∞[.

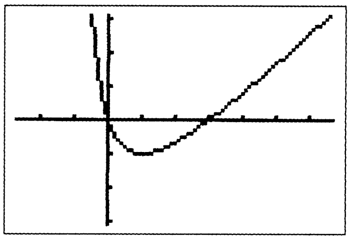
3). Quelle est la dérivée de f ? Etudier les variations de f.

4). Ecrire une équation de la tangente T à *C* au point d'abscisse 2 et une équation de la tangente T' à *C* au point d'abscisse 5.

5). Construire *C*, D, D', T et T'

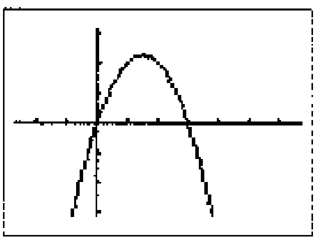
7- Fonction et dérivée

A.Le graphique ci-contre est celui d'une courbe représentant une fonction f définie sur $]-1;+\infty[$.

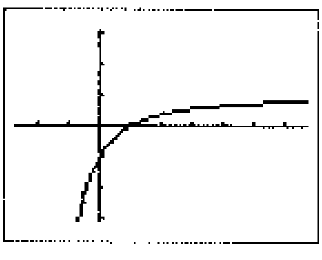


Parmi les quatre courbes (courbe de 1 à 4), laquelle est susceptible de représenter f ' ? **(justifier)**

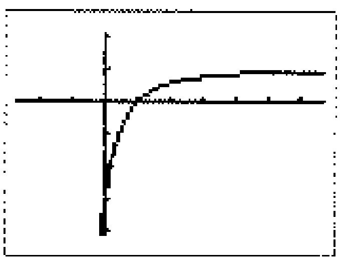
Courbe 1



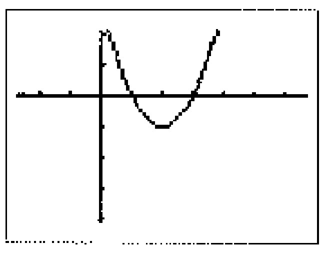
Courbe 2



Courbe 3



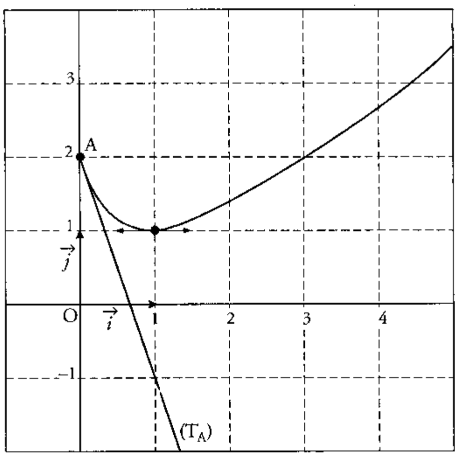
Courbe 4



B.

La courbe ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

On note f' sa dérivée et la droite (T_A) est la tangente au point A d'abscisse 0. La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. Enfin, la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$



1. A partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes :

a. Compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1
f(x)		
$f'(x)$		

b. Donner le tableau de variations de f (avec le signe de f').

2. On considère la fonction g inverse de la fonction f, c'est-à-dire $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ définie sur□ . On note g' sa dérivée.

a. Justifier le domaine de définition de g

b. Calculer g(0), g(1) et g(3).

c. Exprimer $g'(x)$ en fonction de f(x) et de $f'(x)$. Déterminer alors les valeurs de g'(0) et de g'(1).

d. Déterminer le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$?

8- Etude d'une fonction trigonométrique

Partie A

1- Démontrer que pour tout réel x cos x +sin x= $\sqrt{2}$ [cos (x- $\frac{\pi}{4}$)].

2- En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation cos x + sin x = – $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Partie B

On considère la fonction définie sur [-π ; π] par $f(x) = 2\cos(x)\sin(x) - x$

On note C sa courbe représentative dans un repère (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) orthonormé.

1- a)Etudier la parité de f. Que peut on en déduire pour la courbe représentative de f ?
b) Montrer que pour tout $x \in [0 ; \pi]$, $f(x-\pi) = f(x) + \pi$

2- On étudie f sur [0 ; π]

a) Calculer $f'(x)$ et démontrer que pour tout $x \in [0 ; \pi]$ $f'(x) = 4\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) Étudier le signe de f' sur [0 ; π].

c) En déduire le tableau de variations de f sur [0 ; π]

3- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet sur [0 ;π] deux solutions : zéro et une autre solution notée a dont on donnera une valeur approchée par excès à 10^{-2} près.

4- Tracer la courbe C ainsi que les tangentes horizontales sur [-π ; π].
On la tracera d'abord sur [0 ; π], puis on complètera sur [-π ; 0] à l'aide de la question 1).

Thème n°3 : SUITES

Les compétences :
Savoir calculer les premiers termes d'une suite, étudier son sens de variation, la représenter graphiquement, programmer le calcul et la représentation graphique sur sa calculatrice. Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique et, connaître et appliquer les propriétés et les formule de telles suites Etudier la limite d'une suite.

LES OUTILS

Définitions

Une suite (u_n) est une ………………. de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Notation : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \to u(n) = u_n$. u_n est appelé ……………………………….

Suite définie de manière explicite
Une suite (u_n) est définie de manière explicite lorsque chaque terme u_n est défini en fonction de ………………
u_{n+1} = ...

Suite définie par récurrence
Une suite (u_n) est définie par récurrence lorsque l'on connaît un terme de départ et que chaque terme est défini en fonction du ………………………..

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Sens de variation

La suite (u_n) est **croissante** si, pour tout n, ……………….

La suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout n, …………………..

La suite (u_n) est **constante** ou **stationnaire** si ,pour tout n, ………………..

La suite (u_n) est **monotone** si elle est ………………………………………..

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut :

- ♦ Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

- ♦ S'il existe une fonction f telle que , pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$
  Si f est strictement croissante, alors la suite (u_n) est ……………………..
  et Si f est strictement décroissante, alors la suite (u_n) ……………………………..

- ♦ Dans le cas où tous les termes de la suite sont strictement positifs,

si pour tout n $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite est………………… ;et si pour tout n $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite est ……………………

Limites

Soit (u_n) une suite et l un nombre réel.

- La suite (u_n) **converge** vers l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors ……………….

- On dit qu'une suite est **divergente** si ………………………... Alors, ou bien elle a une limite ………………., ou bien …………………………..
- Soit f une fonction définie sur un intervalle [a ; +∞[et soit u la suite définie par $u_n = f(n)$ pour $n \geq a$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ ……………..

- Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites telles que : (u_n) et (w_n)convergent vers la même limite là partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ Alors, la suite (v_n)…………………
- Soit q un réel non nul et différent de 1.

- si $-1 < q < 1$ alors la suite $(q^n)_n$ converge vers zéro : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

- si $q > 1$ alors la suite $(q^n)_n$ tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

- si $q \leq -1$ alors la suite $(q^n)_n$ n'a pas de limite.

Suites arithmétiques et géométriques

Le tableau ci-dessous où a, r et q sont des réels (q non nul), résume les résultats vus en première :

	(u_n) : suite arithmétique de raison r de 1^{er} terme u_0	(u_n) : suite géométrique de raison q de 1^{er} terme u_0
Caractérisation par une formule de récurrence	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} = ...	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} = …………….
Méthode pour démontrer qu'une suite est……	On calcule :	On calcule :
Caractérisation par une formule explicite	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n= …………	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n= …………
Relation entre deux termes quelconques	Pour tous entiers naturels n et p, u_n = ...	Pour tous entiers naturels n et p, u_n = ...
Somme de termes consécutifs -Cas particulier -Cas général	$\sum_{k=1}^{n} k = 1+\ldots+n=$ $\sum_{k=0}^{n} u_k=$	$(q\neq1)$ $\sum_{k=1}^{n} q^k = 1+\ldots+q^n=$ $\sum_{k=0}^{n} u_k=$

.

EXERCICES

Exercice 1 :

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations de la suite U définie par :

a) $U_n = \frac{5}{3^n}$ pour $n\geq0$

b) $U_n = n - 2^n$ pour $n\geq0$

c) $U_n = \frac{5^n}{n+1}$ pour $n\geq0$

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1$

1. Calculer les quatre premiers termes de cette suite.

2.

3. A l'aide d'un graphique (en toile) , représenter les premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses et émettre une conjecture sur la limite éventuelle de la suite (U_n) (en profiter pour programmer les premiers termes de la suite sur votre calculatrice et les représenter graphiquement avec le mode approprié)

4. **a)** Montrer que la suite de terme général $V_n = U_n - \frac{5}{2}$ est une suite géométrique .

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

d) Démontrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

5. Soit (S_n) la suite définie par $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Etudier la convergence de la suite (S_n) .

2ème intermède : PROBLEME DE DATE

en introduction des congruences, en SPE Math.

Vocabulaire :

Les années bissextiles sont :

- *Les années non séculaires dont le millésime est multiple de 4*
- *Les années séculaires dont le millésime est multiple de 400*

Par exemple l'année 2000 était bissextile (2000 = 400x5) ; les années 2100, 2200, 2300 ne le sont pas.

Le 1er janvier 2002 était un mardi.

1) Déterminer quels jours de la semaine correspondaient aux dates suivantes :
a) le 29 janvier 2002.
b) le 12 mars 2002
c) le 1er janvier 2003.

2) Sachant que 2004 est une année bissextile, déterminer combien de jours se sont écoulés entre le 1er janvier 2002 et le 23 avril 2005.
En déduire le jour correspondant à la date du 23 avril 2005.

Thème n°4 : GEOMETRIE : Barycentres, produit scalaire, géométrie dans l'espace et transformations

Les compétences : Savoir placer, reconnaître un barycentre ; calculer un produit scalaire et en déduire des propriétés métriques ; reconnaître une translation, une homothétie et leurs effets sur les figures géométriques. Connaitre et reconnaître les surfaces usuelles de l'espace, savoir tracer la section d'un solide usuel par un plan donné de l'espace.

LES OUTILS

BARYCENTRES

Dans le plan ou dans l'espace (A,a) , (B,b) et (C ;c) sont trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$.
Il existe un unique point G tel que $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
Ce point est appelé **barycentre** des points pondérés (A,a) (B,b) et (C ;c) .

- Propriété fondamentale :Si G est le barycentre de (A ; a) , de (B ; b) et de (C ; c) avec $a+b+c \neq 0$, alors pour tout point M du plan (ou de l'espace) : $a\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC} =$ ………………….

- Homogénéité : Si G est le barycentre de (A ; a) , de (B ; b) et de (C ; c) avec $a+b+c \neq 0$, alors pour tout réel k non nul, G est aussi le barycentre de ……………………………………………..

- Isobarycentre : On appelle isobarycentre trois pointsA, B et C le barycentre de(A ;a), de (B ; a) et de (C ; a). L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC. (càd le point d'intersection de ses médianes.)

- Associativité **:** Si G le barycentre de (A,a) , (B,b) et (C,c) , avec $a + b + c \neq$, et H celui de (A,a) , (B,b), avec $a + b \neq 0$, alors G est le barycentre de………………………

- Coordonnées: le plan est muni d'un repère (O ; $\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$)On donne $A(x_A ;y_A)$, $B(x_B ;y_B)$ et $C(x_C ; y_C)$
Le barycentre G des points pondérés (A,a) ,(B,b) et (C,c) a pour coordonnées :
$\begin{cases} x_G = \\ y_G = \end{cases}$ (ce résultat s'étend à l'espace avec z_G)

PRODUIT SCALAIRE

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan :

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ =……………………………(avec les normes)

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ = ……………………………..(avec le cosinus)

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ = ………………………….. (avec le projeté orthogonal)

Expression analytique dans une BON ($\overrightarrow{i}$; $\overrightarrow{j}$) : $\overrightarrow{u}$(x ;y) et $\overrightarrow{v}$(x' ;y') : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ =………………

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan, , pour tous réels a et b :

(1) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si …………………………

(2) $\left\|\vec{u}\right\|$ = ………………………..

(3) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ = ………………………

(4) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ = ………………………..

(5) $(a\,\overrightarrow{u}) \cdot (b\,\overrightarrow{v})$ = …………………………..

Droites :

- Toute droite du plan admet une équation dite réduite de la forme ……………….. ou x = …………………
- Une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ est une équation dite ……………. d'une unique droite
- On appelle vecteur directeur d'une droite (AB) tout vecteur $\overrightarrow{u}$ dont la direction est (AB).
- On appelle vecteur normal à une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ tout vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$.
- L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x ; y) dans un repère orthonormé vérifient l'égalité

  $ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Cercles :

- Dans un repère orthonormé, le cercle C de centre $A(x_A ; y_A)$ et de rayon R a pour équation :
  ………………………………….
- Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que …………………………..

Relations métriques :

Soit ABC un triangle. On pose a=BC, b=CA, c=AB , $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{ACB}$.

Relations d'Al Kashi :a^2 = …………….. b^2 = ... c^2 = ...

Formule de l'aire : S = …………. = ……………… = …………………….

Formule des sinus : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$ = ………………….=…………………………….

Théorème de la médiane : A et B sont deux points, et I est le milieu de [AB].Alors pour tout point M, on a …………………………………………….

TRANSFORMATIONS

Translations :

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $t_{\overrightarrow{u}}$, associe à chaque point M le point M' tel que …………………..

Si M'est l'image de M et N' celle de N par une translation alors $\overrightarrow{M'N'}$ = ………………………..

Points invariants :………..

Homothéties

L'homothétie de centre O et de rapport k, notée h(O ;k) ou $h_{O\,;\,k}$ associe à chaque point M le point M' tel que …………………………………………….

Dans une homothétie, le centre, un point et son image sont ……………………..

Si M' est l'image de M et N' celle de N par une homothétie de rapport k alors $\overrightarrow{M'N'}$ = ………………

Points invariants :…………………………….

Effets sur longueurs, aires , volumes , barycentres , angles orientés et figures

Une translation conserve…………………………………………………………………………

C'est une …………………………….

Par une translation, l'image d'une droite est ………… et l'image d'un cercle est……………………….

Une homothétie de rapport k conserve………………………… ; et multiplie par …………………………..

Par une homothétie de rapport k,, l'image d'une droite est ………… et l'image d'un cercle est……………………….

ESPACE

VECTEURS COPLANAIRES

On dit que des vecteurs sont coplanaires lorsqu'ils admettent des représentants qui sont dans un même plan

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires. Alors :

« $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires » $\Leftrightarrow$ « il existe des réels a et b tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$. »

REPERAGE DANS L'ESPACE

Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

- Si $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B (x_B ; y_B ; z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}$ ………………………
- Le milieu I de [AB] a pour coordonnées (……………………………………..)
- Si le repère est orthonormal et $\vec{u} (x ; y ; z)$: $\left\|\vec{u}\right\|$ = …………………. et

  AB = $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ = ……………………………………………………..

SURFACES

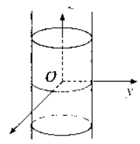
- Tout plan parallèle au plan (xOy) admet une équation cartésienne de la forme : …………

  Tout plan parallèle au plan (xOz) admet une équation cartésienne de la forme : ……………….

  Tout plan parallèle au plan (yOz) admet une équation cartésienne de la forme : ………………

- **La sphère** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que …………………………………….
  Une équation cartésienne de la sphère S de centre A (x_A ; y_A ; z_A) et de rayon R est :
……………………………………………………………………….

- Le **cylindre** d'axe (D) et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que la distance de M à (D) est égale à R.. C'est **une surface de révolution** engendrée par la rotation d'une droite (d) parallèle à (D) autour de l'axe (D). (d) est une génératrice du cylindre.
  Une équation cartésienne du cylindre de rayon R

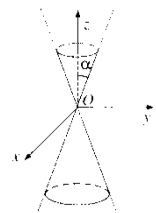
  et d'axe (Oz) est : …………………………….

  et d'axe (Ox) est : ………………………………….

  et d'axe (Oy) est : ………………………………….

- Le **cône** de sommet S, d'axe (D) et d'angle α est l'ensemble des points M de l'espace tels que M = S ou bien $\widehat{MSH} = \alpha$. C'est **une surface de révolution** engendrée par la rotation autour de (D) d'une droite (d) sécante à (D) en S. (d) est une génératrice du cône.

  L'équation d'un cône d'axe (O z) , de sommet O est : $x^2 + y^2 = \lambda z^2$, avec $\lambda = \tan^2(\alpha)$ où α est l'angle formé entre l'axe et une génératrice.

  Une équation d'un cône de sommet O, d'axe (Ox) est : ……………………….

  Une équation d'un cône de sommet O, d'axe (Oy) est : ………………………………

EXERCICES

Exercice 1 :

Déterminer le centre d'inertie de la plaque évidée ABCD : au carré ABCD de côté 5 cm on a enlevé le triangle équilatéral IJK de coté 3 cm. I est le milieu de [AB]

Exercice 2: lieu géométrique dans le plan.

On appelle lieu géométrique l'ensemble des points du plan (ou de l'espace) vérifiant une relation donnée.

ABC est un triangle. On note G le barycentre de (A,1) (B,2) et (C,3).

Soit M un point et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs définis par : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$

1) Exprimer $\overrightarrow{u}$ à l'aide de G
2) Montrer que $\overrightarrow{v}$ est un vecteur constant non nul (indépendant de M)
3) Quel est le lieu géométrique des points M du plan tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient colinéaires ?
4) Quel est le lieu géométrique des points M du plan tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$?
5) Quel est le lieu des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{v}\right\|$?
6) Quel est le lieu des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\|$?

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et D l symétrique de A par rapport à (BC).

1. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
2. Calculez en fonction de a, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}$
3. Etant donné un point M, vérifiez que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} + \frac{a^2}{2}$
4. Quel est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2$?
5. Quel est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2}$?
6. Tracez les ensembles obtenus en 4) et 5). Quelle est leur intersection ?

Exercice 4 :

Soit ABCD un tétraèdre. On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC].

Soit k le barycentre de (A,1) et (D,3), soit L le barycentre de (C,1) et (D,3) et G le point concours des droites (IC) et (AJ).

1. a. Faire une figure.
   b. Exprimer I et J comme barycentre respectivement de A et B, de B et C.
2. a. Que représente G pour le triangle (ABC) ?

b. Exprimer alors G comme barycentre de A, B et C.

3. Soit H le point concours des droites (IL) et (JK).
   a. Exprimer H comme barycentre de (A,a), (B,b), (C,c) et (D,d).
   b. Montrer que H est le milieu de [DG].

Exercice 5 :

Soit G le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées de son centre Ω et son rayon R.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de G avec l'axe des abscisses.
3. Soit A(1 ; - 2) et B(0 ; 3).
   a. Vérifier que A appartient à G.
   b. Déterminer une équation de la tangente D_A en A au cercle G.
   c. Déterminer une équation du cercle G' de diamètre [AB].

Exercice 6 :
Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme tel que :
AB = 4 cm, BC = 5 cm et CA = 6 cm.

1 a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

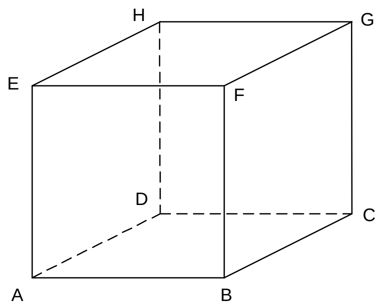
b. En déduire une valeur approchée à un degré près de la mesure de l'angle ABC.

2. a. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ est égal à $\frac{37}{2}$.

b. Calculer alors la longueur BD.

c Déduire du a et du b une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABD}$.

Exercice 7 :
ABCDEFGH est un cube de coté a et M désigne le centre de gravité du triangle EBG.



On se place dans le repère (A ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) orthonormal avec $\vec{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

1. **a.** Pourquoi le repère est-il orthonormal ?
   b. Quelles sont les coordonnées de A, B, C, D, E, F, G et H en fonction de a ?

2. **a.** Construire le centre de gravité M du triangle EBG.
   b. Exprimer M comme un barycentre.
   c. En déduire ses coordonnées en fonction de a.

3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires. Que pouvez-vous conclure ?

Exercice 8 :
<u>QCM</u> : Choisir la ou les bonne(s) réponse(s)

	A	B	C	D
L'équation $x^2 + y^2 = 1$ est une équation	D'un cercle	D'une sphère	D'un cylindre	D'un cône
Le cylindre d'axe (zz') passant par A(1 ;2 ;3)	Coupe (xx') en un point d'abscisse 2	A pour rayon $\sqrt{14}$	A pour rayon $\sqrt{5}$	Passe par le point B(–2 ;–1 ;20)
Le cône de sommet O et d'axe (zz') passant par A(3 ;$\sqrt{3}$;2)	A pour équation $x^2 = 3y^2$	A pour équation $x^2 + y^2 = z^2\sqrt{3}$	Passe par le point B(3 ;4 ;$\frac{5}{\sqrt{3}}$)	A pour angle $\frac{\pi}{3}$

Exercice 9 :
On considère le point A(1 ;0 ;1).
1. Déterminer une équation du cône Γ de sommet O , d'axe (O ; $\vec{k}$) et qui passe par A.
2. Déterminer l'intersection de Γ et de la sphère S de centre O passant par le point A.
3. Déterminer une équation du cylindre dont l'axe est (O ; $\vec{j}$) et qui passe par A
4. Déterminer l'axe de révolution et le rayon du cylindre d'équation $x^2 + z^2 = 8$.

Exercice 10:
Soit C cône d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 4z^2$.
1. Déterminer l'axe de ce cône, et l'angle α formé par cet axe et une génératrice de C.
2. Le point A(- 1 ; 0 ; $\frac{1}{2}$) appartient-il au cône C ?

Exercice 11 :

ABC est un triangle et a un réel. On note f la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' défini par $\overrightarrow{MM'} = a\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\,\overrightarrow{MC}$.

1. Dans cette question, on pose a = 1.Démontrer que f est une translation. Déterminer son vecteur.
2. Dans cette question , on pose $a \neq 1$.

a) Démontrer que f admet un unique point invariant G. définir G comme barycentre des points A, B et C .

b) Démontrer que $\overrightarrow{GM'} = (2- a)\,\overrightarrow{GM}$.

c) Que dire de la transformation lorsque a = 2 ?

d) Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques lorsque $a \neq 2$.

Exercice 12 :

On donne les points A(1 ;3), B(–4 ; - 8) et C(1 ;7). On veut montrer qu'il existe une unique homothétie h transformant O en B et A en C .

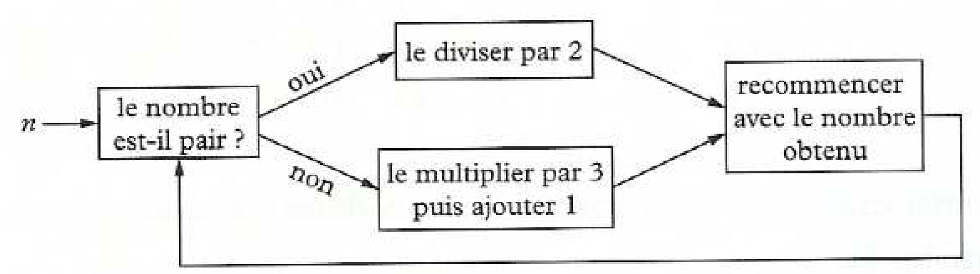
6. On suppose que h existe : quel est son rapport ?
7. Déterminer alors le centre I de h et conclure.
8. Déterminer l'équation de la droite (D') image de la droite (D) d'équation : y = x par h.

3ème intermède : LA CONJECTURE DE SYRACUSE

Découvrir un algorithme célèbre.

Partie A :

Si n est un entier naturel on lui applique l'algorithme suivant :



1) Ecrire les neuf étapes qui suivent le début des calculs effectués ci-dessous pour n=3 :
   3 (impair) $\rightarrow 3\times3+1=10$ (pair) $\rightarrow 10\div2=5$ (impair) $\rightarrow 3\times5+1=16$ (pair) $\rightarrow 16\div2=8$ (pair) $\rightarrow$ …
   Que remarque-ton ?

2) Faire tourner cet algorithme pour n=5, n=21, n=13.

3) Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Partie B :

Cet algorithme peut se programmer à la calculatrice avec des structures de test et de boucle à condition de savoir tester si un entier donné est pair ou non.

1) Fonction INT de la calculatrice :
   On la trouve : sur TI dans MATH, NUM et sur casio dans OPTN, NUM.
   Calculer INT(6,7), INT(4,1), INT(2,5), INT(3).
   Que représente INT(x) pour x réel positif ?
2) Pour quels entiers aura-t-on INT(n/2) = n/2 ?
3) Programmer l'algorithme avec pour condition d'arrêt l'obtention du nombre 1. On pourra incorporer à ce programme un compteur qui détermine le nombre d'étapes avant l'obtention éventuelle du 1.

Partie C :

VOCABULAIRE : on appelle :

- « vol » la suite obtenue à partir d'un entier avant d' »atterrir » à 1 (si on « atterrit » à 1)
- « durée du vol » le nombre d'étapes du vol
- « Altitude du vol » le plus grand entier obtenu pendant le vol

Compléter le tableau suivant :

Entier n	2	3	4	5	9	10	14	16	18	24	27	
Durée du vol		7			19						111	
Altitude du vol		16			52						9232	

La conjecture de Syracuse, encore appelée conjecture de Collatz, conjecture d'Ulam, conjecture tchèque ou problème 3x+1 est l'hypothèse mathématique selon laquelle les suites de Syracuse de tous les nombres strictement positifs atteignent 1.

En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture continue de défier les mathématiciens. Paul Erdős a dit à propos de la conjecture de Syracuse : « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ».

Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une blague courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine.

Thème n°5 : ANGLES ET TRIGONOMETRIE

<u>Les compétences</u> : Savoir passer avec aisance de degrés en radians et vice-versa. Calculer une mesure d'un angle orienté. Connaître les cosinus et sinus des angles remarquables, savoir appliquer les formules d'addition, de duplication, résoudre des équations et inéquations trigonométriques et passer de coordonnées polaires à des coordonnées cartésiennes et vice-versa

LES OUTILS

ANGLES ORIENTES

Tout couple ($\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$) de vecteurs non nuls est appelé <u>angle orienté.</u>

<u>Mesures :</u> ($\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$) = $\alpha + k \times 2\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) ou ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$)= α [2 π] (α modulo 2 π)

<u>Mesure principale</u> : mesure en radians de l'angle qui appartient à] – π ; π].

<u>Deux vecteurs</u> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ <u>sont colinéaires</u> si et seulement si : ($\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$) = …………[2 π] ou ($\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$) = ……. [2 π]

<u>Relation de Chasles</u> :($\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$) + ($\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{w}$) = ………………….. [2π]

<u>Propriétés</u> : ($\vec{u}$; $\vec{u}$) = …………. [2 π] ; ($\vec{u}$;– $\vec{u}$) = ……………..[2 π] et ($\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{u}$) = ……………….. [2π]

si k et k' sont deux réels non nuls :Si k et k' sont de même signe (k $\overrightarrow{u}$; k' $\overrightarrow{v}$) = ……………… [2 π]

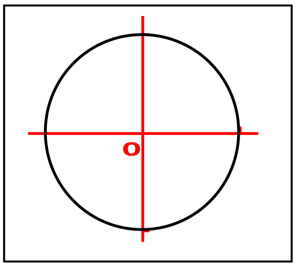
Si k et k' sont de signes contraires (k $\overrightarrow{u}$; k' $\overrightarrow{v}$) = ………………..[2 π]

TRIGONOMETRIE

π radian =………….. °

Cercle trigonométrique : ……………………………………………..

Sinus, cosinus, tangente :……………………………………………..



<u>Lecture du cercle trigonométrique</u>

$\cos^2 x + \sin^2 x$ = $\le \cos x \le$

cos (x+2π) = $\le \sin x \le$

sin (x+2π) =

cos (– x) = cos (x+π) = cos (π – x) =

sin (– x) = sin (x+π) = sin (π – x) =

$\cos (x + \frac{\pi}{2})$ = $\cos (\frac{\pi}{2} - x)$ = tan (– x) =

$\sin (x + \frac{\pi}{2})$ = $\sin (\frac{\pi}{2} - x)$ = tan (π – x) = tan (π + x)=

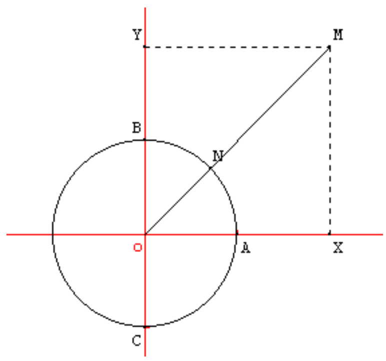
<u>Valeurs remarquables</u>

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cosx						
sin x						
tan x						

Formules d'addition		**Formules de duplication**	
cos (a+b) =	cos (a– b) =	cos 2a = = =	sin 2a =
sin (a+b) =	sin (a– b) =	$\cos^2 a$ =	$\sin^2 a$ =

Résolution d'équations	
sin x = sin a ⇔	cos x = cos a ⇔

COORDONNEES POLAIRES



Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on appelle **coordonnées polaires** d'un point M du plan distinct de O tout couple de coordonnées (ρ ,θ) tel que :

$$\begin{cases} OM = \rho \text{ (donc } \rho > 0) \\ (\vec{i} ; \overrightarrow{OM}) = \theta \ [2\pi] \end{cases}$$

Formules de passage :

Coordonnées cartésiennes M(x ;y)	**Coordonnées polaires M (ρ ,θ)**
x = …………… et y = …………………..	ρ = ……………….. et θ est défini par : cosθ = ………….. et sinθ = ……………..

EXERCICES

Exercice 1 :

Placer les points correspondants aux valeurs de x, puis compléter les tableaux par les valeurs exactes des cosinus et sinus :

x	17π	$35\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-2\pi+\frac{\pi}{3}$	$\frac{121\pi}{4}$	$\frac{-5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	-624π	$35\frac{\pi}{6}$	$\frac{416\pi}{3}$
cos x										
sin x										

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes :

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$ et sur $]-\pi ; \pi]$

$\sin x = \sin(3x + \frac{2\pi}{3})$, puis indiquer les solutions sur un cercle trigonométrique

Exercice 3 : Résoudre les inéquations suivantes

$\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0 ; 4\pi]$ $\quad$ $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$. $\quad$ $\cos 2x \leq \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes

$f(x) = 3\sin(4x + \frac{\pi}{3})$ $\quad$ $g(x) = \frac{\cos 2x}{5 + \sin^2 3x}$

Exercice 5:

On considère l'équation (E) d'inconnue x réel : $\cos x + \sin x = 1$

3. Donner des solutions évidentes de l' équation (E)
4. Montrer que $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$
5. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 6 :

ABC est un triangle isocèle en A ;
Calculer $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ sachant que :

a) $(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$ $\quad$ b) $(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{CB}) = 5\frac{\pi}{7}\ (2\pi)$

Exercice 7 :

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère orthonormé

On considère le points A et B de coordonnées polaire $(2 ; \frac{\pi}{4})$ et $(5 ; -3\frac{\pi}{2})$.

e) Placer les points A et B
f) Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$
g) Déterminer les coordonnées de A et de B
h) Calculer la distance AB.

Exercice 8 :

Démontrer que $\cos(x + y) \times \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x$
Exprimer à l'aide de $\sin 2x$, $(\cos x - \sin x)^2$

x et y sont des réels de $[0 ; \frac{\pi}{2}$ tels que $\cos x = \frac{1}{3}$ et $\cos y = \frac{3}{5}$. Calculer $\sin x$, $\sin y$,$\cos(2x - y)$ et $\sin(2x - y)$.

Thème n°6 : STATISTIQUES ET PROBABILITES

<u>Les compétences</u> : Construire, lire, interpréter des diagrammes (histogrammes, diagrammes en boîte,…)
Déterminer les paramètres de position et de dispersion d'une série de données.
Utiliser l'interpolation linéaire pour déterminer médiane ou quartile. Calculer la probabilité d'évènements liés à une expérience aléatoire ; déterminer la loi de probabilité, l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire.

LES OUTILS

STATISTIQUES

<u>Notations</u> :

- x_1 , x_2, ...,x_k les valeurs d'une série statistique, ou les centres des classes si ces valeurs sont regroupées en classes ;
- n_1 , n_2 , ...n_k les effectifs associés. L'effectif total est : $n = n_1 + n_2 + ... + n_k = \sum_{1}^{k} n_i$;
- f_1 , f_2 , ...f_k les fréquences associées : $f_i = \frac{n_i}{n}$; $\sum_{1}^{k} f_i = 1$

<u>Le couple : mode ; étendue</u>

- **Le mode** est la valeur du caractère ayant le plus grand …………………
- **L'étendue** est la différence entre les valeurs ………………….. du caractère

<u>Le couple : médiane ; écart interquartile</u>

- **La médiane**, notée M_e, est la valeur du caractère qui sépare la série ordonnée en …………………………………….
- **Quartiles « empiriques »**

Les valeurs de la série étant rangées dans l'ordre croissant, les <u>quartiles et la médiane</u> partagent la série en 4 groupes de même effectif. :

- Le premier quartile, noté Q_1, est la plus petite valeur des termes de la série telle qu'au moins 25% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- Le troisième quartile, noté Q_3, est la plus petite valeur des termes de la série telle qu'au moins 75% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- **Le diagramme en boîte** est une représentation graphique qui résume la série étudiée par ses valeurs extrêmes, sa médiane et ses quartiles.
- **L'intervalle interquartile** est l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$. Il contient …………… de l'effectif total.
  L'écart interquartile est la différence $Q_3 – Q_1$. C'est l'indicateur de dispersion associé à la médiane

<u>Le couple : moyenne ; écart type</u>

- **La moyenne** $\overline{x}$ d'une série statistique est la valeur que prendrait le caractère si tous les individus étaient identiques. $\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n} = \frac{\sum_{1}^{k} n_ix_i}{n}$ ou $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k = \sum_{1}^{k} f_ix_i$
- **La variance V** d'une série de données de moyenne $\overline{x}$ est l'indicateur de dispersion associé à la moyenne

$$V = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + n_k(x_k - \overline{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{k} n_ix_i^2 - \overline{x}^2 = \sum_{1}^{k} f_ix_i^2 - \overline{x}^2$$

- **L'écart type** σ d'une série statistique est $\sigma = \sqrt{V}$

EXPERIENCE ALEATOIRE

On appelle **expérience aléatoire ou épreuve**, toute expérience dont le résultat est soumis au hasard.

L'ensemble des **éventualités** (ou **résultats possibles**) d'une expérience aléatoire est appelé **…………….** et noté Ω.

Un événement A est une partie de l'univers. Il est constitué d'une ou plusieurs éventualités. On dira que A est réalisé si une des éventualités qui le constituent est réalisé.

Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'une seule éventualité.

- On appelle **intersection** de deux événements A et B, l'événement « A et B », que l'on note $\mathbf{A \cap B}$, constitué des éventualités qui appartiennent simultanément à A …………. à B .

- Deux événements A et B sont **incompatibles ou disjoints** si leur intersection est ……………, c'est-à-dire si aucun résultat ne les réalise en même temps.

- On appelle **réunion** des événements A et B, l'événement « A ou B », que l'on note $\mathbf{A \cup B}$, constitué des éventualités qui appartiennent ……………………. des événements A et B.

- On appelle **événement contraire** de A, l'événement noté $\overline{\mathbf{A}}$, constitué de toutes les éventualités qui ……………………………

PROBABILITE

$\Omega = \{ e_1 ; ... ; e_n \}$. On dit que l'on définit une probabilité sur Ω lorsqu'à tout événement élémentaire e_i, on associe $p(e_i)$ tel que : $0 \le p(e_i) \le 1$ et $p(e_1) + ... + p(e_n) = 1$

Pour tout évènement A, on a $0 \le P(A) \le 1$

$p(\Omega) =$ ………… $p(\emptyset) =$………………….

$p(A \cup B) =$ .... si $A \cap B = \emptyset$, $p(A \cup B) =$ ……………………

$p(\overline{A}) =$ ....

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité de l'événement A est : $p(A) =$ ……………………….

VARIABLE ALEATOIRE

- Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire.

On appelle **variable aléatoire** toute application de Ω dans $\mathbb{R}$, c'est à dire toute application qui à chaque éventualité e_i de Ω fait correspondre un réel.

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$e_i \longmapsto k$

On notera **X (Ω)** les valeurs que peut prendre X.

- On appelle **loi de probabilité de X** l'application qui à tout k de $X(\Omega)$ fait correspondre la probabilité de l'événement $(X = k)$.

  $X(\Omega) \longrightarrow [0 ; 1]$

  $k \longmapsto P(X = k)$

- **L'espérance mathématique** de la variable aléatoire X est la « moyenne » de la variable aléatoire X Elle est définie par $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

  La variance de la variable aléatoire. X est l'espérance mathématique du carré de la variable centrée.
  Elle est donc définie par $V(x) = E([X - E(X)]^2). = E(X^2) - [E(X)]^2$

  L'écart type est la racine carrée de la variance, il est défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

<u>EXERCICES</u>

Exercice 1 :

On a relevé les tailles de 250 adultes pris au hasard dans la population papou. Après regroupement par classes, on obtient les résultats suivants :

Tailles	[135 ;140[	[140 ;145[	[145 ;150[	[150 ;155[	[155 ;160[	[160 ;165[	[165 ;170[
Effectifs	32	40	42	76	41	14	5

On suppose que cet échantillon est représentatif de la population papou et l'on admet qu'à l'intérieur de chaque classe la répartition est régulière.

1- Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants puis tracer l'histogramme et enfin le polygone correspondant.

2- Donner une valeur approchée de la médiane Me de cette série par lecture graphique puis déterminer la valeur exacte par interpolation affine.

3- Déterminer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ de cette série statistique.

4- Evaluer le nombre de papous adultes qui ont une taille supérieure à la moyenne mais qui sont plus petits que la moitié des papous.

5- A près avoir calculé les quartiles, construire la boîte à moustaches correspondant à cette population (c'est le moment de revoir la manipulation de votre calculatrice pour vérifier…)

Exercice 2 :

Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs. Parmi les 120 billets, 3 donnent droit à 4 places gratuites, 6 donnent droit à 3 places gratuites, 18 donnent droit à 2 places gratuites, 42 donnent droit à une place gratuite et les autres billets ne gagnent rien.

1. Quelle est la probabilité pour un spectateur donné de gagner exactement deux places gratuites ?
2. Quelle est la probabilité pour un spectateur donné de ne rien gagner ?
3. X est la variable aléatoire désignant le nombre de places gratuites gagnées par un billet :
   a- Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b- Déterminer, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de X.
   c- Quelle est la probabilité, pour un spectateur donné, de gagner au moins deux places gratuites ?
   d- Calculer l'espérance et l'écart type de X

Exercice 3 :

Une entreprise fabrique des pièces mécaniques en grande série. 95% de ces pièces ne présentent pas de défaut. Cette entreprise dispose d'un appareil qui contrôle la qualité des pièces produites. Cet appareil accepte toutes les pièces sans défaut mais ne rejette que 80% de celles qui ont un défaut.

Partie A

On considère un lot de 10 000 pièces respectant ces pourcentages

1- Compléter le tableau suivant.

	Nombre de pièces avec défaut	Nombre de pièces sans défaut	TOTAL
Nombre de pièces acceptées après contrôle	100		
Nombre de pièces rejetées après contrôle			
TOTAL		9 500	10 000

2- On choisit une pièce au hasard parmi les 10 000 du lot précédent. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.
   a- Calculer la probabilité p_1 que cette pièce ait un défaut et ne soit pas rejetée par l'appareil de contrôle.
   b- Calculer la probabilité p_2 que cette pièce soit rejetée par l'appareil de contrôle.

Partie B

On admet qu'une pièce sans défaut rapporte 30€ à l'entreprise, une pièce rejetée coûte 15€ et une pièce ayant un défaut et non rejetée coûte 40€ (à cause des frais de remplacement).
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie au hasard dans le lot de 10 000, associe le gain (positif ou négatif) correspondant pour l'entreprise.

1- Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de X.
2- Montrer que l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X est E(X) = 27,5€. Interpréter ce nombre.

Exercice 4 :

Deux véhicules A et B se présentent à une aire de péage comportant 3 voies de passages ouvertes numérotées 1, 2 et 3 de gauche à droite. On suppose qu'ils s'engagent au hasard et dans des voies différentes.

1. Déterminer à l'aide d'un arbre toutes les possibilités de passage de ces deux véhicules. Quel est le nombre de possibilités ?

2. Calculer les probabilités des événements suivants :

A = « les véhicules sont côte à côte. »
B = « les deux véhicules ne sont pas côte à côte. »
C = « la voie n°3 est libre. »
D = « le véhicule A passe à gauche du véhicule B. »