Thème n°3 : SUITES

Les compétences :
Savoir calculer les premiers termes d'une suite, étudier son sens de variation, la représenter graphiquement, programmer le calcul et la représentation graphique sur sa calculatrice. Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique et, connaître et appliquer les propriétés et les formule de telles suites Etudier la limite d'une suite.

LES OUTILS

Définitions

Une suite (u_n) est une ………………. de ℕ ou d'une partie de ℕ dans ℝ.
Notation : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \to u(n) = u_n$. u_n est appelé ………………………………

Suite définie de manière explicite
Une suite (u_n) est définie de manière explicite lorsque chaque terme u_n est défini en fonction de ……………
u_{n+1} = ...

Suite définie par récurrence
Une suite (u_n) est définie par récurrence lorsque l'on connaît un terme de départ et que chaque terme est défini en fonction du ………………………..

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Sens de variation

La suite (u_n) est **croissante** si, pour tout n, ……………….

La suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout n, …………………..

La suite (u_n) est **constante** ou **stationnaire** si ,pour tout n, ………………..

La suite (u_n) est **monotone** si elle est ………………………………………..

Pour étudier le sens de varaition d'une suite, on peut :

- Etudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

- S'il existe une fonction f telle que , pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$
  Si f est strictement croissante, alors la suite (u_n) est ……………………..
  et Si f est strictement décroissante, alors la suite (u_n) ……………………………..

- Dans le cas où tous les termes de la suites sont strictement positifs,

si pour tout n $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite est………………… ;et si pour tout n $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite est ……………………

Limites

Soit (u_n) une suite et l un nombre réel.

- La suite (u_n) **converge** vers l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors ……………….

- On dit qu'une suite est **divergente** si ……………………….. Alors, ou bien elle a une limite ………………., ou bien …………………………..
- Soit f une fonction définie sur un intervalle [a ; +∞[et soit u la suite définie par $u_n = f(n)$ pour $n \geq a$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$ ……………..

- Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites telles que : (u_n) et (w_n)convergent vers la même limite là partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$ Alors, la suite (v_n)…………………
- Soit q un réel non nul et différent de 1.

- si $-1 < q < 1$ alors la suite $(q^n)_n$ converge vers zéro : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

- si $q > 1$ alors la suite $(q^n)_n$ tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

- si $q \leq -1$ alors la suite $(q^n)_n$ n'a pas de limite.

Suites arithmétiques et géométriques

Le tableau ci-dessous où a, r et q sont des réels (q non nul), résume les résultats vus en première :

	(u_n) : suite arithmétique de raison r de 1^{er} terme u_0	(u_n) : suite géométrique de raison q de 1^{er} terme u_0
Caractérisation par une formule de récurrence	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} = ...	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} = …………….
Méthode pour démontrer qu'une suite est……	On calcule :	On calcule :
Caractérisation par une formule explicite	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n= ………….	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n= ………….
Relation entre deux termes quelconques	Pour tous entiers naturels n et p, u_n = ...	Pour tous entiers naturels n et p, u_n = ...
Somme de termes consécutifs -Cas particulier -Cas général	$\sum_{k=1}^{n} k = 1+\ldots+n=$ $\sum_{k=0}^{n} u_k=$	$(q\neq 1)$ $\sum_{k=1}^{n} q^k = 1+\ldots+q^n=$ $\sum_{k=0}^{n} u_k=$

.

EXERCICES

Exercice 1 :

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations de la suite U définie par :

a) $U_n = \frac{5}{3^n}$ pour $n \geq 0$

b) $U_n = n - 2^n$ pour $n \geq 0$

c) $U_n = \frac{5^n}{n+1}$ pour $n \geq 0$

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1$

1. Calculer les qutre premiers termes de cette suites.

2.

3. A l'aide d'un graphique (en toile) , représenter les premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses et émettre une conjecture sur la limite éventuelle de la suite (U_n) (en profiter pour programmer les premiers termes de la suite sur votre calculatrice et les représenter graphiquement avec lemode approprié)

4. **a)** Montrer que la suite de terme général $V_n = U_n - \frac{5}{2}$ est une suite géométrique .

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

d) Démontrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

5. Soit (S_n) la suite définie par $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Etudier la convergence de la suite (S_n) .