Thème n°6 : STATISTIQUES ET PROBABILITES

Les compétences : Construire, lire, interpréter des diagrammes (histogrammes, diagrammes en boîte,…)
Déterminer les paramètres de position et de dispersion d'une série de données.
Utiliser l'interpolation linéaire pour déterminer médiane ou quartiles . Calculer la probabilité d'évènements liés à une expérience aléatoire ; déterminer la loi de probabilité, l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire.

LES OUTILS

STATISTIQUES

Notations :

- x_1 , x_2, ...,x_k les valeurs d'une série statistique, ou les centres des classes si ces valeurs sont regroupées en classes ;
- n_1 , n_2 , ...n_k les effectifs associés. L'effectif total est : $n = n_1 + n_2 + ... + n_k = \sum_1^k n_i$;
- f_1 , f_2 , ...f_k les fréquences associées : $f_i = \frac{n_i}{n}$; $\sum_1^k f_i = 1$

Le couple : mode ; étendue

- **Le mode** est la valeur du caractère ayant le plus grand …………………
- **L'étendue** est la différence entre les valeurs ………………….. du caractère

Le couple : médiane ; écart interquartile

- **La médiane**, notée M_e, est la valeur du caractère qui sépare la série ordonnée en …………………………………….
- **Quartiles « empiriques »**

Les valeurs de la série étant rangées dans l'ordre croissant, les quartiles et la médiane partagent la série en 4 groupes de même effectif. :

- Le premier quartile, noté Q_1, est la plus petite valeur des termes de la série telle qu'au moins 25% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- Le troisième quartile, noté Q_3, est la plus petite valeur des termes de la série telle qu'au moins 75% des valeurs lui soient inférieures ou égales.
- **Le diagramme en boîte** est un représentation graphique qui résume la série étudiée par ses valeurs extrêmes, sa médiane et ses quartiles.
- **L'intervalle interquartile** est l'intervalle [Q_1 ; Q_3]. Il contient …………… de l'effectif total.
  L'écart interquartile est la différence $Q_3 - Q_1$. C'est l'indicateur de dispersion associé à la médiane

Le couple : moyenne ; écart type

- **La moyenne** $\overline{x}$ d'une série statistique est la valeur que prendrait le caractère si tous les individus étaient identiques. $\overline{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n} = \frac{\sum_1^k n_ix_i}{n}$ ou $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k = \sum_1^k f_ix_i$
- **La variance V** d'une série de données de moyenne $\overline{x}$ est l'indicateur de dispersion associé à la moyenne

$$V = \frac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + n_k(x_k - \overline{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_1^k n_i(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_1^k n_ix_i^2 - \overline{x}^2 = \sum_1^k f_ix_i^2 - \overline{x}^2$$

- **L'écart type** σ d'une série statistique est $\sigma = \sqrt{V}$

EXPERIENCE ALEATOIRE

On appelle **expérience aléatoire ou épreuve**, toute expérience dont le résultat est soumis au hasard.

L'ensemble des **éventualités** (ou **résultats possibles**) d'une expérience aléatoire est appelé **……………** et noté Ω.

Un événement A est une partie de l'univers . Il est constitué d'une ou plusieurs éventualités. On dira que A est réalisé si une des éventualités qui le constituent est réalisé.

Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'une seule éventualité.

- On appelle **intersection** de deux événements A et B, l'événement « A et B », que l'on note $\mathbf{A \cap B}$, constitué des éventualités qui appartiennent simultanément à A …………. à B .

- Deux événements A et B sont **incompatibles ou disjoints** si leur intersection est ……………, c'est-à-dire si aucun résultat ne les réalise en même temps.

- On appelle **réunion** des événements A et B, l'événement « A ou B », que l'on note $\mathbf{A \cup B}$, constitué des éventualités qui appartiennent ……………………. des événements A et B.

- On appelle **événement contraire** de A, l'événement noté $\overline{\mathbf{A}}$, constitué de toutes les éventualités qui ……………………………

PROBABILITE

$\Omega = \{ e_1 ; ... ; e_n \}$. On dit que l'on définit une probabilité sur Ω lorsqu'à tout événement élémentaire e_i, on associe $p(e_i)$ tel que : $0 \leq p(e_i) \leq 1$ et $p(e_1) + ... + p(e_n) = 1$

Pour tout évènement A, on a $0 \leq P(A) \leq 1$

p(Ω) = ………… p(∅) =…………………

p (A ∪ B) = ... si A ∩ B = ∅ , p (A ∪ B) = ……………………

p($\overline{A}$) = ...

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité de l'événement A est : p(A) = ……………………….

VARIABLE ALEATOIRE

- Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire.

On appelle **variable aléatoire** toute application de Ω dans ℝ, c'est à dire toute application qui à chaque éventualité e_i de Ω fait correspondre un réel.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$e_i \longmapsto k$$

On notera **X (Ω)** les valeurs que peut prendre X.

- On appelle **loi de probabilité de X** l'application qui à tout k de X(Ω) fait correspondre la probabilité de l'événement (X= k).

$$X(\Omega) \longrightarrow [0 ; 1]$$
$$k \longmapsto P(X = k)$$

- **L'espérance mathématique** de la variable aléatoire X est la « moyenne » de la variable aléatoire X Elle est définie par $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

  La variance de la variable aléatoire. X est l'espérance mathématique du carré de la variable centrée.
  Elle est donc définie par $V(x) = E\left([X - E(X)]^2\right). = E(X^2) - [E(X)]^2$

  L'écart type est la racine carrée de la variance, il est défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

EXERCICES

Exercice 1 :

On a relevé les tailles de 250 adultes pris au hasard dans la population papou. Après regroupement par classes, on obtient les résultats suivants :

Tailles	[135 ;140[	[140 ;145[	[145 ;150[	[150 ;155[	[155 ;160[	[160 ;165[	[165 ;170[
Effectifs	32	40	42	76	41	14	5

On suppose que cet échantillon est représentatif de la population papou et l'on admet qu'à l'intérieur de chaque classe la répartition est régulière.

1- Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants puis tracer l'histogramme et enfin le polygone correspondant.
2- Donner une valeur approchée de la médiane Me de cette série par lecture graphique puis déterminer la valeur exacte par interpolation affine.
3- Déterminer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ de cette série statistique.
4- Evaluer le nombre de papous adultes qui ont une taille supérieure à la moyenne mais qui sont plus petits que la moitié des papous.
5- A près avoir calculé les quartiles, construire la boîte à moustaches correspondant à cette population (c'est le moment de revoir la manipulation de votre calculatrice pour vérfier…)

Exercice 2 :

Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs. Parmi les 120 billets, 3 donnent droit à 4 places gratuites, 6 donnent droit à 3 places gratuites, 18 donnent droit à 2 places gratuites , 42 donnent droit à une place gratuite et les autres billets ne gagnent rien.

1. Quelle est la probabilité pour un spectateur donné de gagner exactement deux places gratuites ?
2. Quelle est la probabilité pour un spectateur donné de ne rien gagner ?
3. X est la variable aléatoire désignant le nombre de places gratuites gagnées par un billet :
   - a- Quelles sont les valeurs prises par X ?
   - b- Déterminer, sous forme d'un tableau , la loi de probabilité de X.
   - c- Quelle est la probabilité, pour un spectateur donné, de gagner au moins deux places gratuites ?
   - d- Calculer l'espérance et l'écart type de X

Exercice 3 :

Une entreprise fabrique des pièces mécaniques en grande série . 95% de ces pièces ne présentent pas de défaut. Cette entreprise dispose d'un appareil qui contrôle la qualité des pièces produites. Cet appareil accepte toutes les pièces sans défaut mais ne rejette que 80% de celles qui ont un défaut.

Partie A

On considère un lot de 10 000 pièces respectant ces pourcentages

1- Compléter le tableau suivant.

	Nombre de pièces avec défaut	Nombre de pièces sans défaut	TOTAL
Nombre de pièces acceptées après contrôle	100		
Nombre de pièces rejetées après contrôle			
TOTAL		9 500	10 000

2- On choisit une pièce au hasard parmi les 10 000 du lot précédent. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

a- Calculer la probabilité p_1 que cette pièce ait un défaut et ne soit pas rejetée par l'appareil de contrôle.
b- Calculer la probabilité p_2 que cette pièce soit rejetée par l'appareil de contrôle.

Partie B

On admet qu'une pièce sans défaut rapporte 30€ à l'entreprise, une pièce rejetée coûte 15€ et une pièce ayant un défaut et non rejetée coûte 40€ (à cause des frais de remplacement).
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque pièce choisie au hasard dans le lot de 10 000, associe le gain (positif ou négatif) correspondant pour l'entreprise.

1- Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de X.
2- Montrer que l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X est E(X) = 27,5€. Interpréter ce nombre.

Exercice 4 :

Deux véhicules A et B se présentent à une aire de péage comportant 3 voies de passages ouvertes numérotées 1, 2 et 3 de gauche à droite. On suppose qu'ils s'engagent au hasard et dans des voies différentes.

1. Déterminer à l'aide d'un arbre toutes les possibilités de passage de ces deux véhicules. Quel est le nombre de possibilités ?

2. Calculer les probabilités des événements suivants :

A = « les véhicules sont côte à côte. »
B = « les deux véhicules ne sont pas côte à côte. »
C = « la voie n°3 est libre. »
D = « le véhicule A passe à gauche du véhicule B. »