

Thème n°2 : ETUDES DE FONCTIONS

Les compétences :

Déterminer un domaine de définition, étudier la parité, calculer une dérivée et en déduire les variations de la fonction. Etablir l'équation d'une tangente, déterminer les éléments de symétrie d'une courbe, étudier les limites d'une fonction et en déduire l'existence d'asymptotes à la courbe. Etudier la position relative de courbes représentatives (deux courbes, courbe et tangente, courbe et asymptote,...)

LES OUTILS

Domaine de définition

noté D_f , de la fonction f , c'est.....

Calcul différentiel

Fonction dérivable en un point

Soit f une fonction définie sur I , a un élément de I . On dit que f est dérivable en a :

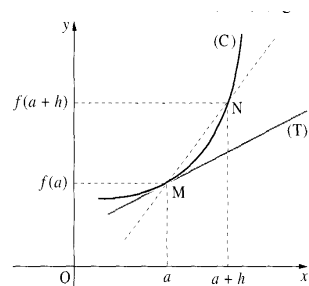
- si $\lim_{x \rightarrow a} \dots\dots\dots = L$ avec L réel.
- ou si $\lim_{h \rightarrow 0} \dots\dots\dots = L$ avec L réel.
- ou si $f(a+h) = \dots\dots\dots$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

Ces trois définitions sont équivalentes. Le nombre L est appelé nombre dérivé de f en a et noté : $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \dots\dots\dots = \lim_{h \rightarrow 0} \dots\dots\dots$$

Interprétation graphique :

C est la courbe représentative de f dans un repère.
Une équation de la tangente T à C au point A d'abscisse a est



Dérivées des fonctions usuelles

$f(x) =$	$f'(x) =$	f dérivable sur l'intervalle
k (constante)		
x		
x^2		
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$		
$\frac{1}{x}$		
\sqrt{x}		
$\sin x$		
$\cos x$		

Dérivées et opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I , k un nombre réel.
Soit f une fonction dérivable sur I .

Formules	Conditions de validité
$(u + v)' = \dots\dots\dots$ $(ku)' = \dots\dots$ $(u \times v)' = \dots\dots\dots$	\emptyset
$(\frac{1}{v})' = \dots\dots\dots$ $(\frac{u}{v})' = \dots\dots\dots$	v ne s'annule pas sur I .
Si $g(x) = f(ax + b)$, alors $g'(x) =$	$(ax + b) \in I$.

CP : Si $g(x) = \cos(ax+b)$ alors $g'(x) = \dots\dots\dots$; si $g(x) = \sin(ax+b)$ alors $g'(x) = \dots\dots\dots$

Dérivée et sens de variation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- (1) f est constante sur I , si et seulement si, la dérivée f' est $\dots\dots\dots$ sur I .
- (2) f est strictement croissante sur I , si et seulement si, la dérivée f' est $\dots\dots\dots$ sur I (éventuellement nulle en des points isolés).
- (3) f est strictement décroissante sur I , si et seulement si, la dérivée f' est $\dots\dots\dots$ sur I (éventuellement nulle en des points isolés).

Dérivée et extremum local :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert et c un élément de I .

- Si $f(c)$ est un extremum local, alors $f'(c) = \dots\dots\dots$
- Si $f'(c) = 0$, alors $f(c)$ est un extremum local.

Remarque : la tangente à C_f au point d'abscisse c est alors horizontale.

Courbes et symétrie

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **paire** si et seulement si pour tout x élément de I on a :

- $-x \in I$ (I est centré en 0)
- $f(-x) = \dots\dots\dots$

La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est $\dots\dots\dots$

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **impaire** si et seulement si pour tout x élément de I on a :

- $-x \in I$ (I est centré en 0)
- $f(-x) = \dots\dots\dots$

La courbe représentative d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est $\dots\dots\dots$

Soit f une fonction définie sur I et C sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** pour C lorsque pour tout x tel que $a + x \in I$ on a :

- $a - x \in I$ (I est centré en a)
- $f(a + x) = \dots\dots\dots$

Le point $A(a ; b)$ est un **centre de symétrie** pour C lorsque pour tout x tel que $a + x \in I$ on a :

- $a - x \in I$
- $f(a + x) + f(a - x) = 2b$

Limites

Cas indéterminés :

Les quatre cas où la limite présente une forme indéterminée et qui nécessitent une étude approfondie sont :

Cas particuliers :

- la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'un polynôme est égale à celle de son
- la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite

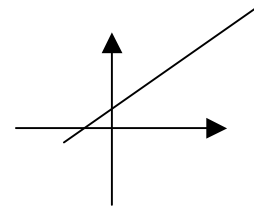
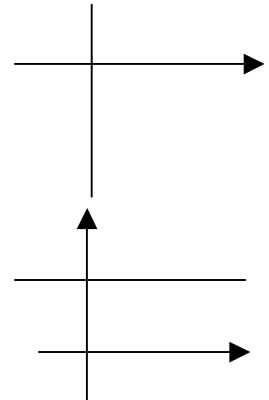
Asymptotes

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O ; \vec{i} ; \vec{j})

• Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote** pour la courbe représentative de f .

• Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote** pour la courbe représentative de f .

• Si $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une **asymptote** pour la courbe représentative de f .



• Dans les cas 2 et 3, on peut étudier **la position de la courbe par rapport à l'asymptote** .

Méthode : on pose $d(x) = f(x) - b$ (ou $d(x) = f(x) - (ax+b)$).

- Lorsque $d(x) > 0$, la courbe se trouve de l'asymptote.
- Lorsque $d(x) < 0$, la courbe se trouve de l'asymptote.

Remarque : On applique la même méthode pour étudier les positions relatives de deux courbes, d'une courbe et d'une tangente.

EXERCICES

1- Compléter :

- Si $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \infty$, alors.....
- Si $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 5$, alors..... et.....

Si, en outre $f(1) = -3$, alors l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est.....

- Chercher les points de la courbe où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 7$ revient à résoudre l'équation

2- Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{9-x^2}}$

3- Soit f la fonction définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$.

- Donner le domaine de définition de f .
- Sur quel domaine les théorèmes usuels nous permettent-ils de conclure à la dérivabilité de f ?
- Etudier la dérivabilité de f en 1.
- Déterminer le domaine de dérivabilité de f .
- Calculer $f'(x)$.

4- Déterminer les dérivées des fonctions suivantes après avoir précisé leur domaine de définition et de dérivabilité

$$f(x) = \sqrt{-3x+4}; \quad g(x) = \frac{\cos(3x+1)}{x+5}; \quad h(x) = 5x^6 - \frac{7}{3x^5} + 8 \sin x + 10x^{-8}$$

5- Etude d'une fonction rationnelle

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 4}{2x + 4}$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de D_f $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x+4}$
- Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
- Déterminer les équations des éventuelles asymptotes verticales à la courbe représentative de f .
- On note Δ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$. Démontrer que la droite Δ est asymptote oblique à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Etudier la position de la courbe par rapport à Δ .
- Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe, puis donner le tableau de variations complet de la fonction f .
- Déterminer les coordonnées exactes des points A et B d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
- Existe-t-il des points de la courbe admettant une tangente horizontale? Si oui, déterminer leurs coordonnées et l'équation des tangentes.
- Existe-t-il des points de la courbe admettant une tangente parallèle à la droite D d'équation $y = -\frac{3}{2}x + 1$? Si oui, déterminer leurs coordonnées.
- Tracer les asymptotes (en pointillés), la courbe et ses tangentes. (unité graphique 1 cm)

6- Etude d'une fonction

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1; +\infty[$. On donne ci-contre son tableau de variation.

De plus, on admet que, pour tout x élément de $]1; +\infty[$ $f(x)$ peut s'écrire sous

la forme : $f(x) = ax + \frac{b}{x-c}$, où a, b, c , sont trois nombres réels (avec a et b non

nuls) que l'on se propose de déterminer à partir des indications fournies par le tableau de variation de f .

On appelle C la représentation graphique de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

x	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	↘ 2,5 ↗	$+\infty$

- 1). a) Utiliser le tableau de variation pour justifier l'existence d'une droite D asymptote à C. Donner une équation de D.
 b) En déduire la valeur de c.

Pour les questions suivantes, on prendra : $f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$.

- 2). Le tableau de variation nous fournit les coordonnées d'un point particulier de C. En déduire une relation entre a et b.
 3). Calculer la dérivée f' de la fonction f. Utiliser le tableau de variation pour trouver une deuxième relation entre a et b.
 4). Déterminer les réels a et b.

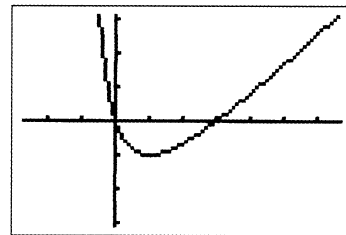
Partie B

On admet que la fonction f est définie par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$.

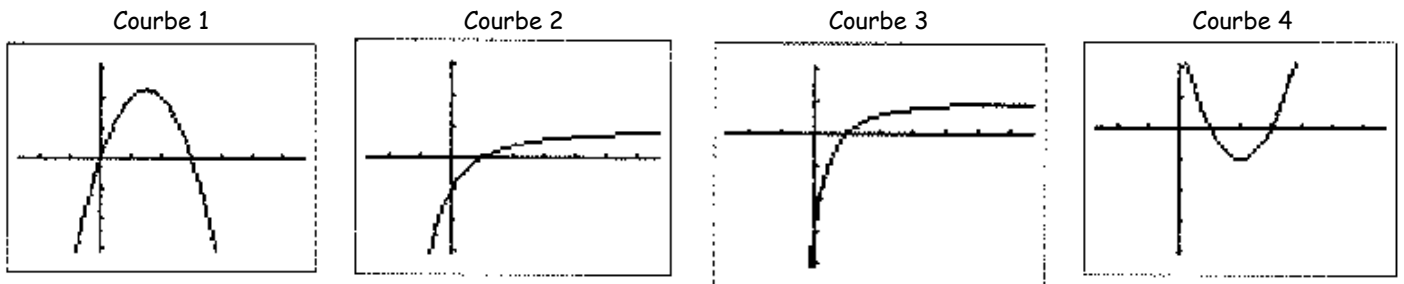
- 1). a) Montrer que la droite D' d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à C.
 b) Etudier la position relative de C et de D'.
- 2). a) Résoudre par le calcul sur $]1; +\infty[$ l'équation $f(x) = 3$.
 b) Résoudre l'inéquation $f(x) > 3$ sur $]1; +\infty[$.
- 3). Quelle est la dérivée de f ? Etudier les variations de f.
 4). Ecrire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 2 et une équation de la tangente T' à C au point d'abscisse 5.
 5). Construire C, D, D', T et T'

7- Fonction et dérivée

A. Le graphique ci-contre est celui d'une courbe représentant une fonction f définie sur $] -1; +\infty[$.

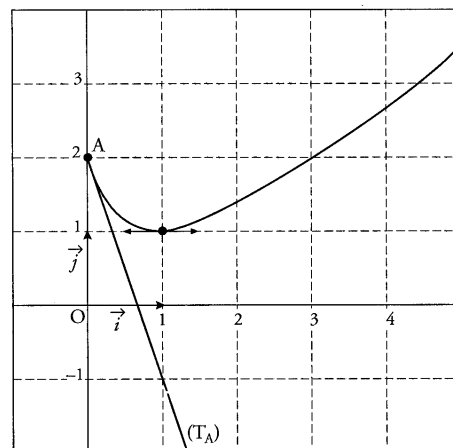


Parmi les quatre courbes (courbe de 1 à 4), laquelle est susceptible de représenter f' ? (justifier)



B. La courbe ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

On note f' sa dérivée et la droite (T_A) est la tangente au point A d'abscisse 0. La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. Enfin, la fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$



1. A partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes :

a. Compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1
f(x)		
f'(x)		

b. Donner le tableau de variations de f (avec le signe de f').

2. On considère la fonction g inverse de la fonction f, c'est-à-dire $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ définie sur \mathbb{R} . On note g' sa dérivée.

- Justifier le domaine de définition de g
- Calculer g(0), g(1) et g(3).
- Exprimer g'(x) en fonction de f(x) et de f'(x). Déterminer alors les valeurs de g'(0) et de g'(1).
- Déterminer le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$?

8- Etude d'une fonction trigonométrique

Partie A

1- Démontrer que pour tout réel x $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right]$.

2- En déduire les solutions sur \mathbb{R} de l'équation $\cos x + \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Partie B

On considère la fonction définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = 2 \cos(x) \sin(x) - x$
On note C sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

- Etudier la parité de f. Que peut on en déduire pour la courbe représentative de f ?
 - Montrer que pour tout $x \in [0; \pi]$, $f(x - \pi) = f(x) + \pi$

2- On étudie f sur $[0; \pi]$

a) Calculer f'(x) et démontrer que pour tout $x \in [0; \pi]$ $f'(x) = 4 \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

b) Étudier le signe de f' sur $[0; \pi]$.

c) En déduire le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$

3- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; \pi]$ deux solutions : zéro et une autre solution notée a dont on donnera une valeur approchée par excès à 10^{-2} près.

4- Tracer la courbe C ainsi que les tangentes horizontales sur $[-\pi; \pi]$.

On la tracera d'abord sur $[0; \pi]$, puis on complètera sur $[-\pi; 0]$ à l'aide de la question 1).