Thème n°1 : CALCUL ALGEBRIQUE

Les compétences :
Développer, factoriser, réduire au même dénominateur, transformer une expression algébrique.
Résoudre des équations et inéquations. Etudier le signe d'une expression algébrique.

LES OUTILS

Identités remarquables

$(a+b)^2 =$

$(a-b)^2 =$.

$(a+b)(a-b) =$

$(a+b)^3 = a^2+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^2-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Trinôme du second degré

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions de $a x^2 + b x + c = 0$			
Factorisation de $a x^2 + b x + c$			
Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$	x f(x)	x f(x)	x f(x)

Polynômes :

- On appelle fonction polynôme ou plus simplement **polynôme** toute fonction , définie sur ℝ qui peut s'écrire sous la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ où a_n , a_{n-1}, …,a_1, a_0 sont des réels a_n , a_{n-1}, …,a_1, a_0 sont appelés les coefficients du polynôme
- Chacun des termes $a_p x^p$ est appelé …………..
- On appelle **degré** d'un polynôme, le plus … …….des degrés des monômes dont il est la somme.
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils sont de même degré et que tous leurs coefficients sont égaux.
- Un réel a est une **racine** (ou zéro) du polynôme P si et seulement si …………….
- Un réel a est une racine du polynôme P si et seulement on peut **factoriser** P par (x–a) ; c'est à dire s'il existe un polynôme Q tel que : P(x) = (x–a) Q(x).

EXERCICES

1- Factoriser

$A = 2x - x(5 - x)$ $\quad$ $B = (x+3)(2x - 5) + 2x + 6$ $\quad$ $C = x^3 - 1 - (7 - x)(x + 1)$

2- **Développer, puis simplifier :**

$G = (2 + \sqrt{5})^2$ $\quad$ $H = (3 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{5})$ $\quad$ $I = (5\sqrt{2} - 1)^2$ $\quad$ $J = (5 - 3\sqrt{3})(1 + 3\sqrt{3})$

3- Rendre rationnels les dénominateurs

$A = \dfrac{3\sqrt{5}}{7\sqrt{2}}$; $\quad$ $B = \dfrac{5}{2 - \sqrt{7}}$; $\quad$ $C = \dfrac{3 - 5\sqrt{2}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}$

4- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(3x + 1)(7 - x) + (7 - x)^2 = 0$; $x^2 - 9 = (2x + 1)(x + 3)$; $x^3 = 4x$; $x^2 - 81 + (x - 9)(x + 5) = 0$

$\dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{7}{3 - x}$; $\quad$ $\dfrac{9 - x^2}{(3x + 1)(2 - x)} = 0$; $\quad$ $\dfrac{(x - 2)(x + 3)}{x^2 - 4x + 2} = 2$

5- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(3x + 1)(7 - x) + (7 - x)^2 < 0$; $\dfrac{9 - x^2}{(3x + 1)(2 - x)} \geq 0$; $\dfrac{2x}{x + 1} < \dfrac{7}{3 - x}$

6-Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt{5x^2 - 4}$ $\quad$; $g(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{2x - 3}{x^2 - 6x + 5}$ $\quad$; $h(x) = \dfrac{5x + 7}{\sqrt{3x + 2}}$ $\quad$; $k(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$

7- Transformation d'écritures :

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -6x^3 + 5x^2 + 29x - 10$

Montrer que -2 est racine de f

En déduire une factorisation de f puis résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$

- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$-{-1 ;1} par $g(x) = \dfrac{2x^3 + 5}{x^2 - 1}$.

Montrer que g(x) peut s'écrire sous la forme : $g(x) = ax + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x-1}$, où a, b et c sont des réels que vous déterminerez.