Thème n°5 : ANGLES ET TRIGONOMETRIE

*<u>Les compétences</u> : Savoir passer avec aisance de degrés en radians et vice-versa. Calculer une mesure d'un angle orienté. Connaître les cosinus et sinus des anglessremarquables, savoir appliquer les formules d'addition, de duplication, résoudre des équations et inéquations trigonométriques et passer de coordonnées polaires à des coordonnées cartésiennes et vice-versa*

# LES OUTILS

## <u>ANGLES ORIENTES</u>

Tout couple ( $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ ) de vecteurs non nuls est appelé <u>angle orienté.</u>

<u>Mesures :</u> ( $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ ) = $\alpha + k \times 2\pi$ ( où $k \in \mathbb{Z}$ ) ou ( $\vec{u}$ , $\vec{v}$ )= $\alpha$ [$2\pi$] ( $\alpha$ modulo $2\pi$ )

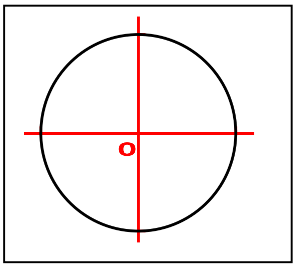
<u>Mesure principale</u> : mesure en radians de l'angle qui appartient à $]-\pi ; \pi]$.

<u>Deux vecteurs</u> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ <u>sont colinéaires</u> si et seulement si : ( $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ ) = …………[$2\pi$] ou ( $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ ) = ……. [$2\pi$]

<u>Relation de Chasles</u> :( $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ ) + ( $\vec{v}$ ; $\vec{w}$ ) = ………………….. [ $2\pi$ ]
<u>Propriétés</u> : ( $\vec{u}$ ; $\vec{u}$) = …………. [$2\pi$] ; ( $\vec{u}$ ;– $\vec{u}$) = ……………..[$2\pi$] et ( $\vec{v}$ ; $\vec{u}$ ) = ……………….. [ $2\pi$ ]

si k et k' sont deux réels non nuls :Si k et k' sont de même signe ( k $\vec{u}$ ; k' $\vec{v}$ ) = ……………… [$2\pi$]
Si k et k' sont de signes contraires ( k $\vec{u}$ ; k' $\vec{v}$ ) = ………………..[$2\pi$]

## <u>TRIGONOMETRIE</u>




**$\pi$ radian =………….. °**

**Cercle trigonométrique : ……………………………………………..**

**Sinus, cosinus, tangente :……………………………………………..**

### <u>Lecture du cercle trigonométrique</u>

$\cos^2 x+\sin^2 x$ = | $\leq \cos x \leq$
$\cos(x+2\pi)$ = | $\leq \sin x \leq$
$\sin(x+2\pi)$ =

$\cos(-x)$ = | $\cos(x+\pi)$ = | $\cos(\pi - x)$ =
$\sin(-x)$ = | $\sin(x+\pi)$ = | $\sin(\pi - x)$ =

$\cos(x+\frac{\pi}{2})$ = | $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ = | $\tan(-x)$ =

$\sin(x+\frac{\pi}{2})$ = | $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ = | $\tan(\pi - x)$ = | $\tan(\pi + x)$=

### <u>Valeurs remarquables</u>

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| cosx | | | | | | |
| sin x | | | | | | |
| tan x | | | | | | |

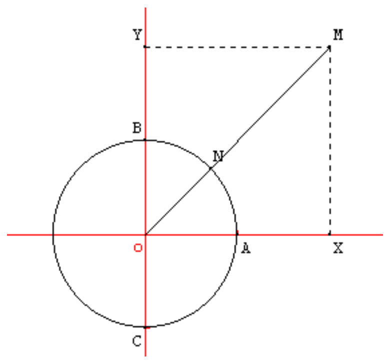
| **Formules d'addition** | | **Formules de duplication** | |
|---|---|---|---|
| $\cos(a+b) =$ | $\cos(a-b) =$ | $\cos 2a =$ | $\sin 2a =$ |
| | | $=$ | |
| | | $=$ | |
| $\sin(a+b) =$ | $\sin(a-b) =$ | $\cos^2 a =$ | $\sin^2 a =$ |

| **Résolution d'équations** | |
|---|---|
| $\sin x = \sin a \Leftrightarrow$ | $\cos x = \cos a \Leftrightarrow$ |

## COORDONNEES POLAIRES

Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$,
on appelle **coordonnées polaires** d'un point M du plan distinct de O tout couple de coordonnées $(\rho, \theta)$ tel que :

$$\begin{cases} OM = \rho \text{ ( donc } \rho > 0) \\ (\vec{i} ; \overrightarrow{OM}) = \theta \ [2\pi] \end{cases}$$




**Formules de passage :**

| **Coordonnées cartésiennes M(x ;y)** | **Coordonnées polaires M ( ρ ,θ )** |
|---|---|
| x = …………… et y = ………………….. | ρ = ……………….. et θ est défini par :<br>cosθ = ………….. et sinθ = …………….. |

# EXERCICES

## Exercice 1 :

Placer les points correspondants aux valeurs de x, puis compléter les tableaux par les valeurs exactes des cosinus et sinus :

| x | $17\pi$ | $35\frac{\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $-2\pi+\frac{\pi}{3}$ | $\frac{121\pi}{4}$ | $\frac{-5\pi}{4}$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $-624\pi$ | $35\frac{\pi}{6}$ | $\frac{416\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cos x | | | | | | | | | | |
| sin x | | | | | | | | | | |

**Exercice 2 :** Résoudre les équations suivantes :

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$ $\qquad$ $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$ et sur $]-\pi\,;\pi]$

$\sin x = \sin(3x + \frac{2\pi}{3})$, puis indiquer les solutions sur un cercle trigonométrique

**Exercice 3 :** Résoudre les inéquations suivantes

$\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;4\pi]$ $\qquad$ $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$. $\cos 2x \leq \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 4** : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes

$f(x) = 3\sin(4x + \frac{\pi}{3})$ $\qquad$ $g(x) = \frac{\cos 2x}{5 + \sin^2 3x}$

**Exercice 5:**

On considèrel'équation (E) d'inconnue x réel : $\cos x + \sin x = 1$

3. Donner dses solutions évidentes de l' équation (E)
4. Montrer que $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$
5. En déduire les solutions de l'équation (E).

**Exercice 6 :**

*ABC est un triangle isocèle en A ;*

*Calculer* $(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ sachant que :

a) $(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$ $\qquad$ b) $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{CB}) = 5\frac{\pi}{7}\ (2\pi)$

**Exercice 7 :**

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère orthonormé

On considère le points A et B de coordonnées polaire $(2\,;\frac{\pi}{4})$ et $(5\,;-3\frac{\pi}{2})$.

e) Placer les points A et B
f) Déterminer uen mesure de $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$
g) Déterminer les coordonnées de A et de B
h) Calculer la distance AB.

**Exercice 8 :**

Démontrer que $\cos(x + y) \times \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x$

Exprimer à l'aide de sin 2x, $(\cos x - \sin x)^2$

x et y sont des réels de $[0\,;\frac{\pi}{2}$ tels que $\cos x = \frac{1}{3}$ et $\cos y = \frac{3}{5}$. Calculer sinx, sin y ,cos (2x–y)rt sin(2x– y).