

Thème n°4 : GEOMETRIE : Barycentres, produit scalaire, géométrie dans l'espace et transformations

Les compétences : Savoir placer, reconnaître un barycentre ; calculer un produit scalaire et en déduire des propriétés métriques ; reconnaître une translation, une homothétie et leurs effets sur les figures géométriques . Connaître et reconnaître les surfaces usuelles de l'espace, savoir tracer la section d'un solide usuel par un plan donné de l'espace.

LES OUTILS

BARYCENTRES

Dans le plan ou dans l'espace (A,a) , (B,b) et (C ;c) sont trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$.

Il existe un unique point G tel que $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Ce point est appelé **barycentre** des points pondérés (A,a) (B,b) et (C ;c) .

- Propriété fondamentale : Si G est le barycentre de (A ; a) , de (B ; b) et de (C ; c) avec $a+b+ c \neq 0$, alors pour tout point M du plan (ou de l'espace) : $a\overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} = \dots\dots\dots$
- Homogénéité : Si G est le barycentre de (A ; a) , de (B ; b) et de (C ; c) avec $a+b+ c \neq 0$, alors pour tout réel k non nul, G est aussi le barycentre de $\dots\dots\dots$
- Isobarycentre : On appelle isobarycentre trois points A, B et C le barycentre de (A ; a), de (B ; a) et de (C ; a). L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC. (càd le point d'intersection de ses médianes.)
- Associativité : Si G le barycentre de (A,a) , (B,b) et (C,c) , avec $a + b + c \neq 0$, et H celui de (A,a) , (B,b), avec $a + b \neq 0$, alors G est le barycentre de $\dots\dots\dots$
- Coordonnées: le plan est muni d'un repère (O ; \vec{i} ; \vec{j}) On donne $A(x_A ; y_A)$, $B(x_B ; y_B)$ et $C(x_C ; y_C)$
Le barycentre G des points pondérés (A,a) , (B,b) et (C,c) a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_G = \\ y_G = \end{cases} \quad (\text{ ce résultat s'étend à l'espace avec } z_G)$$

PRODUIT SCALAIRE

\vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs du plan :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$ (avec les normes)

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$ (avec le cosinus)

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$ (avec le projeté orthogonal)

Expression analytique dans une BON (\vec{i} ; \vec{j}) : $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{v}(x' ; y')$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan, , pour tous réels a et b :

- (1) \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\dots\dots\dots$
- (2) $|\vec{u}| = \dots\dots\dots$
- (3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots\dots\dots$
- (4) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \dots\dots\dots$
- (5) $(a \vec{u}) \cdot (b \vec{v}) = \dots\dots\dots$

Droites :

- Toute droite du plan admet une équation dite réduite de la forme ou $x = \dots\dots\dots$
- Une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ est une équation dite d'une unique droite
- On appelle vecteur directeur d'une droite (AB) tout vecteur \vec{u} dont la direction est (AB).
- On appelle vecteur normal à une droite de vecteur directeur \vec{u} tout vecteur non nul \vec{n} orthogonal à \vec{u} .
- L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x ; y) dans un repère orthonormé vérifient l'égalité $ax + by + c = 0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, est une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Cercles :

- Dans un repère orthonormé, le cercle C de centre A($x_A ; y_A$) et de rayon R a pour équation :
.....
- Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que

Relations métriques :

Soit ABC un triangle. On pose $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$, $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$ et $\hat{C} = \widehat{ACB}$.

Relations d'Al Kashi : $a^2 = \dots\dots\dots$ $b^2 = \dots\dots\dots$ $c^2 = \dots\dots\dots$

Formule de l'aire : $S = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Formule des sinus : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Théorème de la médiane : A et B sont deux points, et I est le milieu de [AB]. Alors pour tout point M, on a

TRANSFORMATIONS

Translations :

La translation de vecteur \vec{u} , notée $t_{\vec{u}}$, associe à chaque point M le point M' tel que

Si M' est l'image de M et N' celle de N par une translation alors $\overline{M'N'} = \dots\dots\dots$

Points invariants :

Homothéties

L'homothétie de centre O et de rapport k, notée $h(O ; k)$ ou $h_{O ; k}$ associe à chaque point M le point M' tel que

Dans une homothétie, le centre, un point et son image sont

Si M' est l'image de M et N' celle de N par une homothétie de rapport k alors $\overline{M'N'} = \dots\dots\dots$

Points invariants :

Effets sur longueurs, aires, volumes, barycentres, angles orientés et figures

Une translation conserve.....

C'est une

Par une translation, l'image d'une droite est et l'image d'un cercle est.....

Une homothétie de rapport k conserve..... ; et multiplie par

Par une homothétie de rapport k, l'image d'une droite est et l'image d'un cercle est.....

ESPACE
VECTEURS COPLANAIRES

On dit que des vecteurs sont coplanaires lorsqu'ils admettent des représentants qui sont dans un même plan

\vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont des vecteurs tels que \vec{v} et \vec{w} ne sont pas colinéaires. Alors :
 « \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires » \Leftrightarrow « il existe des réels a et b tels que $\vec{u} = a \vec{v} + b \vec{w}$. »

REPERAGE DANS L'ESPACE

Dans un repère (O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})

- Si A(x_A ; y_A ; z_A) et B (x_B ; y_B ; z_B) alors \overline{AB}
- Le milieu I de [AB] a pour coordonnées (.....)
- Si le repère est orthonormal et $\vec{u} (x ; y ; z) : \|\vec{u}\| = \dots\dots\dots$ et
 $AB = \|\overline{AB}\| = \dots\dots\dots$

SURFACES

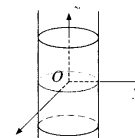
- Tout plan parallèle au plan xOy admet une équation cartésienne de la forme :

Tout plan parallèle au plan xOz admet une équation cartésienne de la forme :

Tout plan parallèle au plan yOz admet une équation cartésienne de la forme :

- **La sphère** de centre A et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que
 Une équation cartésienne de la sphère S de centre A (x_A ; y_A ; z_A) et de rayon R est :

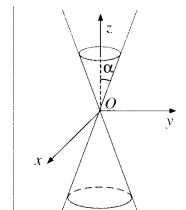
- Le **cylindre** d'axe (D) et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que la distance de M à (D) est égale à R.. C'est **une surface de révolution** engendrée par la rotation d'une droite (d) parallèle à (D) autour de l'axe (D). (d) est une génératrice du cylindre.
 Une équation cartésienne du cylindre de rayon R



- et d'axe (Oz) est :
- et d'axe (Ox) est :
- et d'axe (Oy) est :

- Le **cône** de sommet S, d'axe (D) et d'angle α est l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = S$ ou bien $\widehat{MSH} = \alpha$. C'est **une surface de révolution** engendrée par la rotation autour de (D) d'une droite (d) sécante à (D) en S. (d) est une génératrice du cône.

L'équation d'un cône d'axe (O z) , de sommet O est : $x^2 + y^2 = \lambda z^2$, avec $\lambda = \tan^2(\alpha)$ où α est l'angle formé entre l'axe et une génératrice.



- Une équation d'un cône de sommet O, d'axe (Ox) est :
- Une équation d'un cône de sommet O, d'axe (Oy) est :

EXERCICES

Exercice 1 :

Déterminer le centre d'inertie de la plaque évidée ABCD : au carré ABCD de côté 5 cm on a enlevé le triangle équilatéral IJK de côté 3 cm. I est le milieu de [AB]

Exercice 2: lieu géométrique dans le plan.

On appelle lieu géométrique l'ensemble des points du plan (ou de l'espace) vérifiant une relation donnée. ABC est un triangle. On note G le barycentre de (A,1) (B,2) et (C,3).

Soit M un point et \vec{u} et \vec{v} les vecteurs définis par : $\vec{u} = \vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}$ et $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$

1) Exprimer \vec{u} à l'aide de G

2) Montrer que \vec{v} est un vecteur constant non nul (indépendant de M)

3) Quel est le lieu géométrique des points M du plan tels que \vec{u} et \vec{v} soient colinéaires ?

4) Quel est le lieu géométrique des points M du plan tels que $\vec{u} = \vec{v}$?

5) Quel est le lieu des points M de l'espace tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$?

6) Quel est le lieu des points M de l'espace tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$?

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et D l symétrique de A par rapport à (BC).

1. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

2. Calculez en fonction de a, le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

3. Etant donné un point M, vérifiez que : $\vec{MB} \cdot \vec{MC} = MA^2 + \vec{MA} \cdot \vec{AD} + \frac{a^2}{2}$

4. Quel est l'ensemble des points M tels que : $\vec{MB} \cdot \vec{MC} = MA^2$?

5. Quel est l'ensemble des points M tels que : $\vec{MB} \cdot \vec{MC} = \frac{a^2}{2}$?

6. Tracez les ensembles obtenus en 4) et 5). Quelle est leur intersection ?

Exercice 4 :

Soit ABCD un tétraèdre . On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC].

Soit K le barycentre de (A,1) et (D,3), soit L le barycentre de (C,1) et (D,3) et G le point concours des droites (IC) et (AJ).

1. a. Faire une figure.

b. Exprimer I et J comme barycentre respectivement de A et B, de B et C.

2. a. Que représente G pour le triangle (ABC) ?

b. Exprimer alors G comme barycentre de A, B et C.

3. Soit H le point concours des droites (IL) et (JK).

a. Exprimer H comme barycentre de (A,a), (B,b), (C,c) et (D,d).

b. Montrer que H est le milieu de [DG].

Exercice 5 :

Soit G le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$.

1. Déterminer les coordonnées de son centre Ω et son rayon R.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de G avec l'axe des abscisses.

3. Soit A(1 ; - 2) et B(0 ; 3).

a. Vérifier que A appartient à G.

b. Déterminer une équation de la tangente D_A en A au cercle G.

c. Déterminer une équation du cercle G' de diamètre [AB].

Exercice 6 :

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme tel que :

$AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$ et $CA = 6 \text{ cm}$.

1. a. Calculer le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.
b. En déduire une valeur approchée à un degré près de la mesure de l'angle ABC.
2. a. Montrer que le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{BD}$ est égal à $\frac{37}{2}$.
b. Calculer alors la longueur BD.
c. Déduire du a et du b une valeur approchée de l'angle \widehat{ABD} .

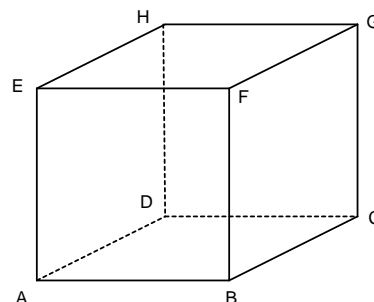
Exercice 7 :

ABCDEFGH est un cube de coté a et M désigne le centre de gravité du triangle EBG.

On se place dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal avec $\vec{i} = \frac{1}{a} \vec{AB}$,

$\vec{j} = \frac{1}{a} \vec{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{a} \vec{AE}$.

1. a. Pourquoi le repère est-il orthonormal ?
b. Quelles sont les coordonnées de A, B, C, D, E, F, G et H en fonction de a ?
2. a. Construire le centre de gravité M du triangle EBG.
b. Exprimer M comme un barycentre.
c. En déduire ses coordonnées en fonction de a.
3. Montrer que les vecteurs \vec{DF} et \vec{DM} sont colinéaires. Que pouvez-vous conclure ?



Exercice 8 :

QCM : Choisir la ou les bone(s) réponse(s)

	A	B	C	D
L'équation $x^2 + y^2 = 1$ est une équation	D'un cercle	D'une sphère	D'un cylindre	D'un cône
Le cylindre d'axe (zz') passant par A(1 ; 2 ; 3)	Coupe (xx') en un point d'abscisse 2	A pour rayon $\sqrt{14}$	A pour rayon $\sqrt{5}$	Passé par le point B(-2 ; -1 ; 20)
Le cône d esommet O et d'axe (zz') passant par A(3 ; $\sqrt{3}$; 2)	A pour équation $x^2 = 3 y^2$	A pour équation $x^2 + y^2 = z^2 \sqrt{3}$	Passé par le point B(3 ; 4 ; $\frac{5}{\sqrt{3}}$)	A pour angle $\frac{\pi}{3}$

Exercice 9 :

On considère le point A(1 ; 0 ; 1).

1. Déterminer une équation du cône Γ de sommet O, d'axe $(O ; \vec{k})$ et qui passe par A.
2. Déterminer l'intersection de Γ et de la sphère S de centre O passant par le point A.
3. Déterminer une équation du cylindre dont l'axe est $(O ; \vec{j})$ et qui passe par A
4. Déterminer l'axe de révolution et le rayon du cylindre d'équation $x^2 + z^2 = 8$.

Exercice 10:

Soit C cône d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 4z^2$.

1. Déterminer l'axe de ce cône, et l'angle α formé par cet axe et une génératrice de C.
2. Le point A(-1 ; 0 ; $\frac{1}{2}$) appartient-il au cône C ?

Exercice 11 :

ABC est un triangle et a un réel. On note f la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' défini par $\overrightarrow{MM'} = a \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2 \overrightarrow{MC}$.

1. Dans cette question, on pose $a = 1$. Démontrer que f est une translation. Déterminer son vecteur.
2. Dans cette question, on pose $a \neq 1$.
 - a) Démontrer que f admet un unique point invariant G . Définir G comme barycentre des points A , B et C .
 - b) Démontrer que $\overrightarrow{GM'} = (2 - a) \overrightarrow{GM}$.
 - c) Que dire de la transformation lorsque $a = 2$?
 - d) Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques lorsque $a \neq 2$.

Exercice 12 :

On donne les points $A(1 ; 3)$, $B(-4 ; -8)$ et $C(1 ; 7)$. On veut montrer qu'il existe une unique homothétie h transformant O en B et A en C .

1. On suppose que h existe : quel est son rapport ?
2. Déterminer alors le centre I de h et conclure.
3. Déterminer l'équation de la droite (D') image de la droite (D) d'équation : $y = x$ par h .